9. Sea $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Möbius tal que $\phi(2) = 2$, $\phi(1-i) = 2+i$ y $\phi(1+i) = \infty$.

o recta

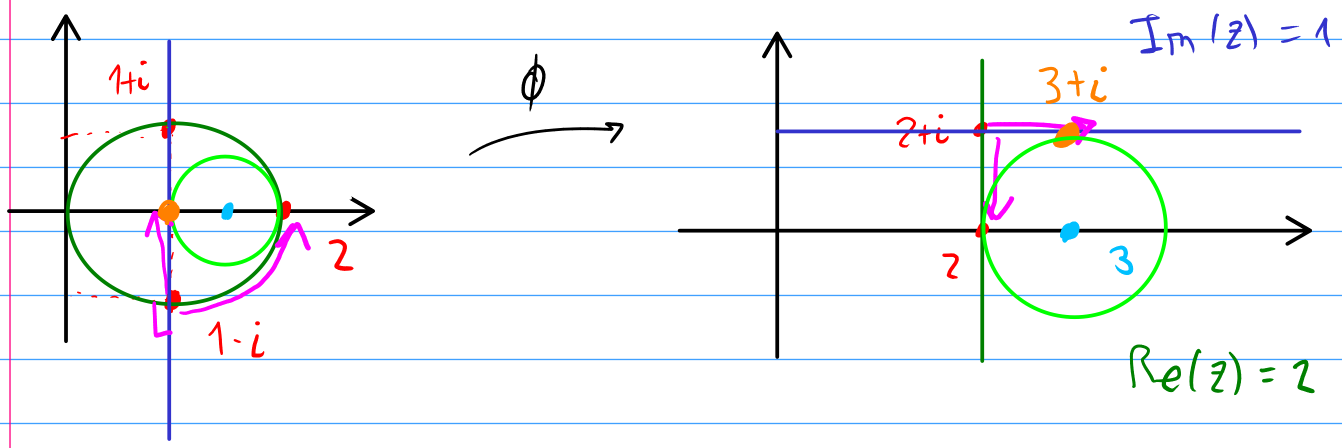
a) Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ una circunferencia. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\phi(\mathcal{C})$ sea una recta. $(1+i) \in \mathcal{C}$

b) Sea $\mathcal{C} := (\partial B(1,1))=$ borde de la bola de centro 1 y radio 1. Halle $\phi(\mathcal{C})$. $Re(z) = 2$

c) Hallar $\phi(\{z \in \mathbb{C} : \ |z - 3/2| = 1/2\})$.

d) ¿Existe $z \in B(1,1)$ tal que $|\phi(z)| = 1$? Justifique.

(*Sugerencia: No es necesario encontrar una fórmula explícita para* ϕ)



$$\det(J_{(x,z)} f) = |f'(z)|^2.$$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u = Re(f)$, $v = Im(f)$

$F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

4. Se llama "región" a un conjunto abierto y conexo. Sea $f \in H(\Omega)$ donde Ω es una región. Probar que cada una de las siguientes condiciones implica que f es constante en Ω. $F \in C^1$

a) $f'(z) = 0$ en Ω.

b) $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

c) $f(\Omega)$ esta contenido en un recta.

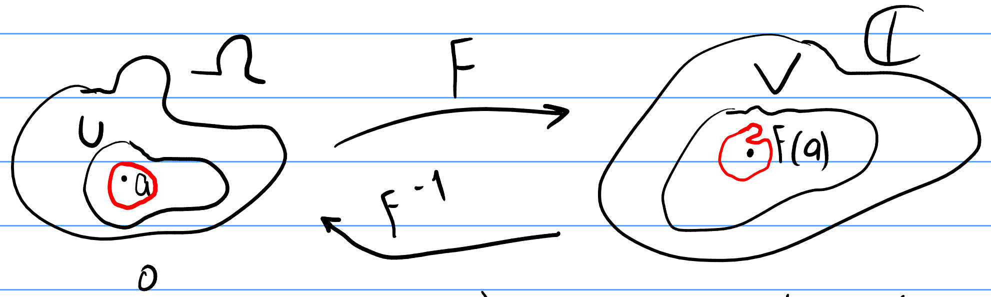
d) $|f(z)|$ constante en Ω.

e) $f(\Omega)$ tiene interior vacío. *Sugerencia: observar que el determinante del Jacobiano de* f *debe ser 0 en todo punto, por qué?*

Si $|J_F(a)| \neq 0$, por teorema de la función inversa, $\exists U$ entorno abierto de a, $\exists V$ entorno abierto de $F(a)$, $F|_U : U \to V$ es un difeomorfismo

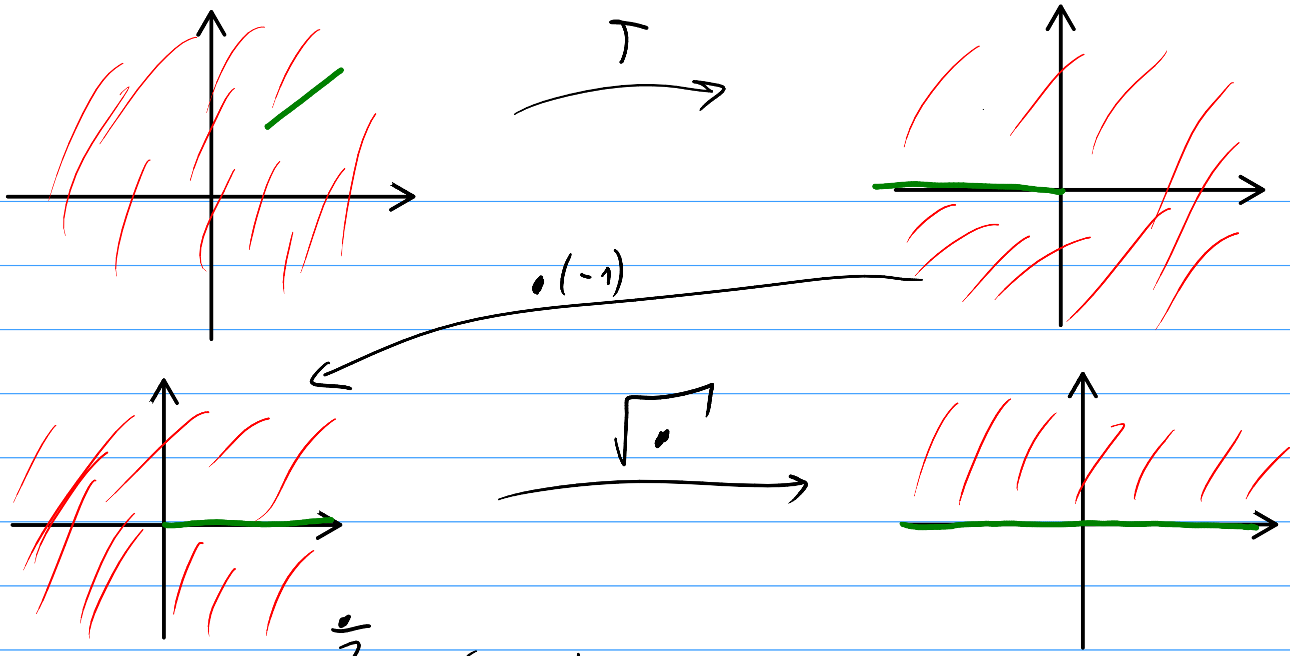
$\Rightarrow F^{-1}$ es continua $\Rightarrow$ dado $\delta > 0$, $(F^{-1})^{-1}(\underbrace{B(a,\delta)}_{\subseteq \Omega})$ es abierto

Pero $(F^{-1})^{-1}(B(a,\delta)) = F(B(a,\delta)) \subseteq F(\Omega)$



$\Rightarrow f(a) \in f(\Omega)^{\circ} = \emptyset$ y $\Rightarrow \forall a \in \Omega$, $|J_F(a)| = 0 = |f'(a)|^2$

$\Rightarrow f' \equiv 0$



$$(0, 2\pi) \xmapsto{\frac{\cdot}{2}} (0, \pi)$$