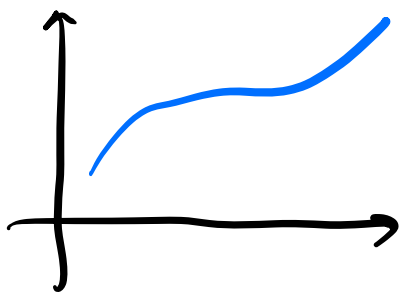
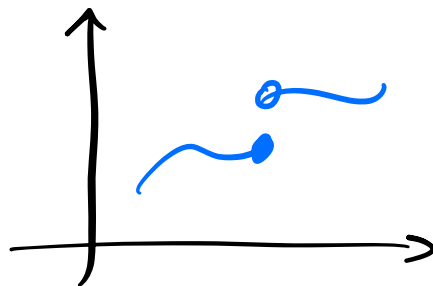


Idea de función continua:

"una función definida en un intervalo es continua si podemos dibujar el gráfico sin levantar el lápiz"

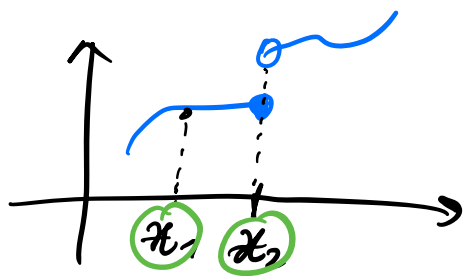


ES CONTINUA



NO ES CONTINUA

"una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto $x_0 \in I$ si el gráfico de f no se rompe en x_0 "



← ES CONTINUA EN x_1

← NO ES CONTINUA EN x_2

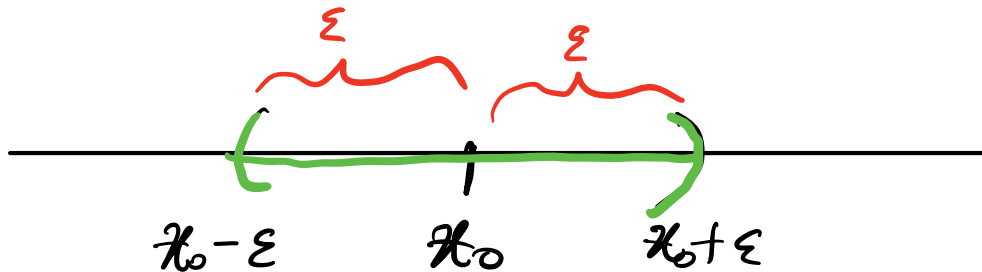
"Decimos que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si

f es continua en $x \forall x \in \mathbb{I}$

Notación:

Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, definimos

$$E(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

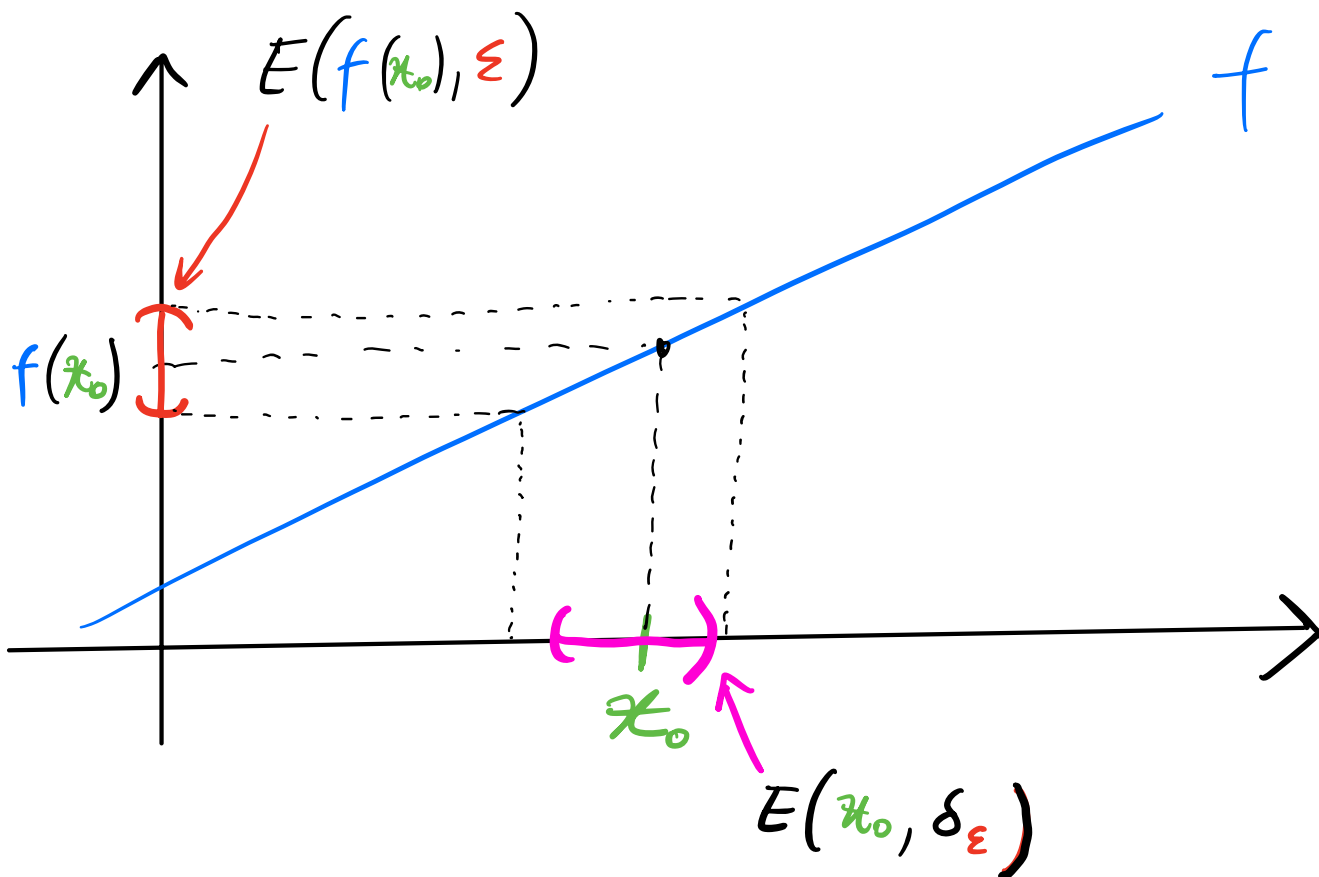


Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es

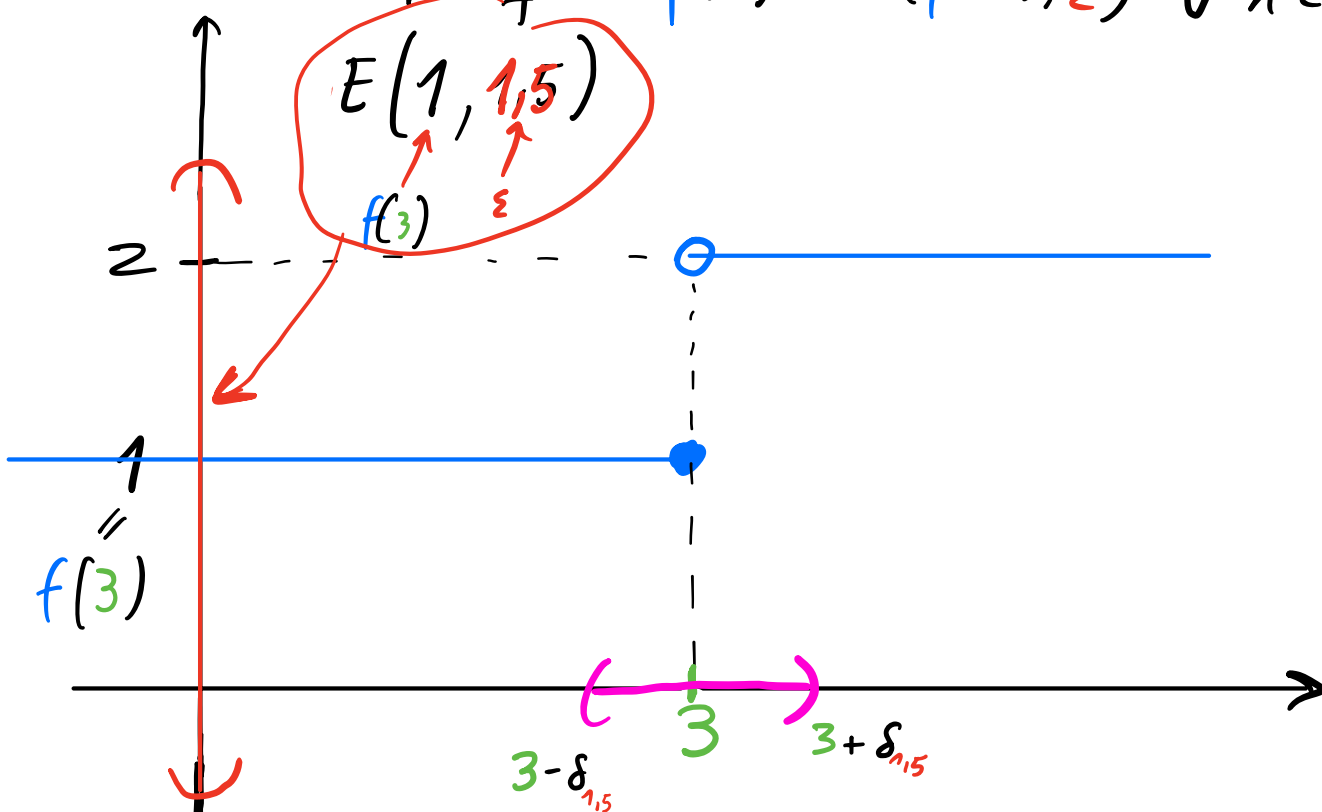
continua en $x_0 \in \mathbb{R}$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 /$$

$$f(x) \in E(f(x_0), \varepsilon) \quad \forall x \in E(x_0, \delta_\varepsilon)$$



Se cumple que $f(x) \in E(f(x_0), \epsilon) \forall x \in E(x_0, \delta_\epsilon)$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Queremos "ver" que f no es continua en 3 usando la definición. Es decir, queremos ver que no se cumple:

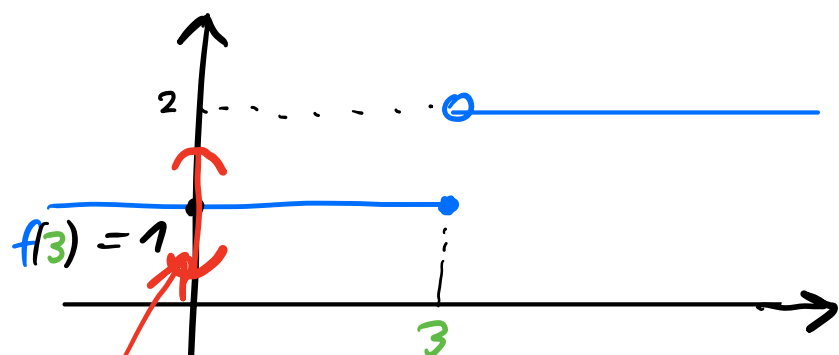
$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 / \right. \\ \left. f(x) \in E(f(3), \varepsilon) \quad \forall x \in E(3, \delta_\varepsilon) \right)$$

$\varepsilon = 1,5 \leadsto$ cualquier δ_ε va a verificar que

$$f(x) \in E(\underbrace{f(3)}_1, 1,5) \quad \forall x \in E(3, \delta_{1,5})$$

Pero, si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, no existe un $\delta_{\frac{1}{2}}$ con la propiedad que

$$f(x) \in E(\underbrace{f(3)}_1, \frac{1}{2}) \quad \forall x \in E(3, \delta_{\frac{1}{2}})$$



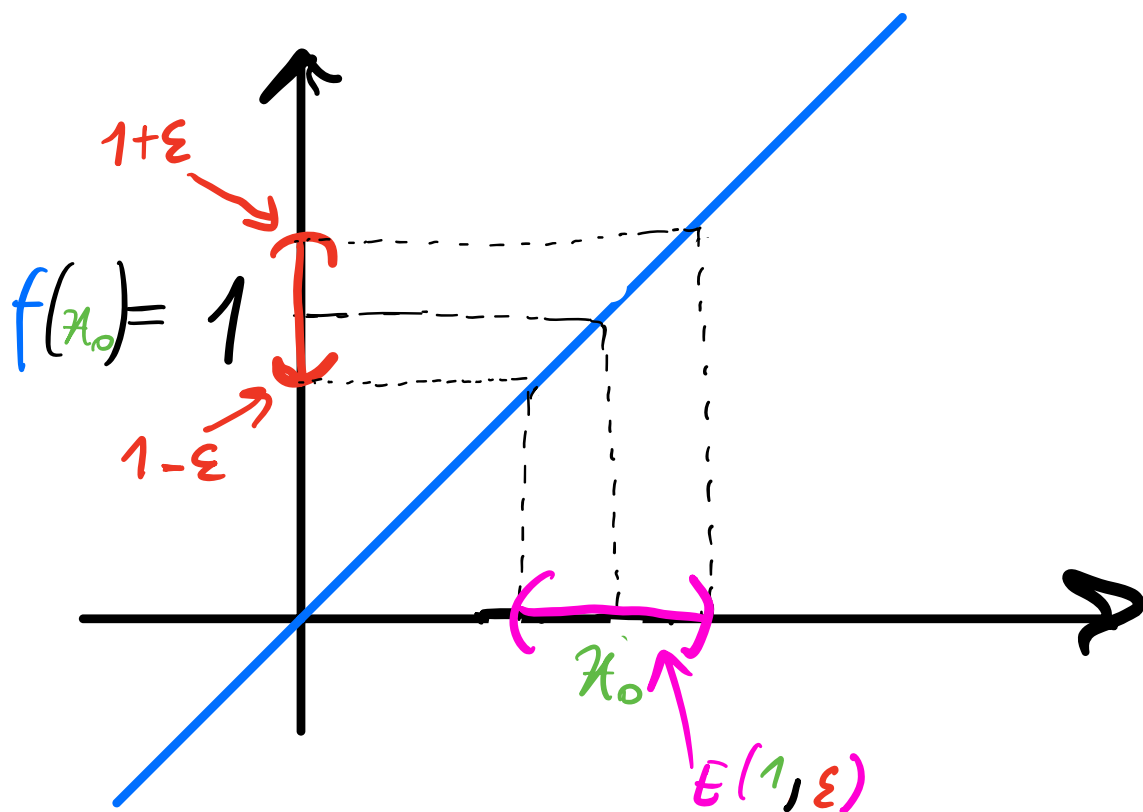
$$E(1, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

"No existe $\delta_{\frac{1}{2}}$ porque, sin importar qué tan chico se $\delta_{\frac{1}{2}}$ siempre va a tener puntos mayores a 3 cuya imagen va a ser $f(x) = 2$ y que por lo tanto no pertenecerán al $E(f(3), \frac{1}{2})$ "

Entonces f no es continua en 3.

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} /$
 $f(x) = x$

Veamos que f es continua en 1.



Queremos ver que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$
 $f(x) \in E(f(x_0), \varepsilon) \quad \forall x \in E(x_0, \delta_\varepsilon)$

$$f^{-1}(E(x_0, \varepsilon)) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in E(x_0, \varepsilon)\} =$$

$$= E(x_0, \varepsilon)$$

Entonces, si tomamos $\delta_\varepsilon := \varepsilon$,

tendremos que

$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\\ \\ x}} \in E(x_0, \varepsilon) \quad \forall \quad x \in E(x_0, \varepsilon)$$

Entonces f es continua en x_0

Como f es continua en $x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$,

concluimos que f es continua.

Pequeña variación de la definición de continuidad

intervalo

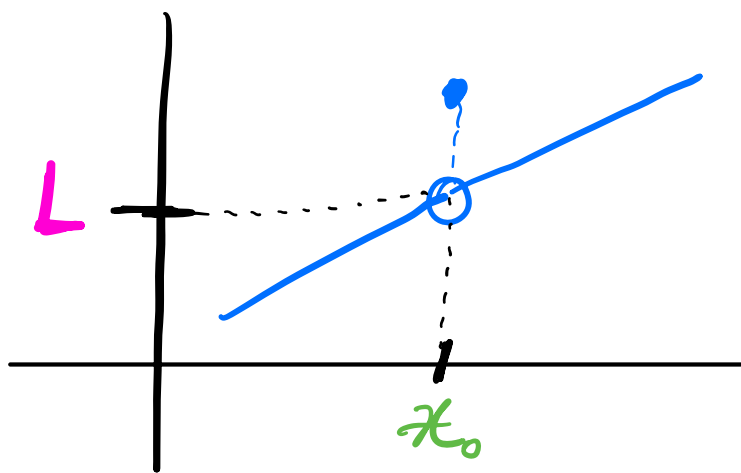
Sea $f: \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbf{I}$.

Decimos que f es continua en x_0 si:

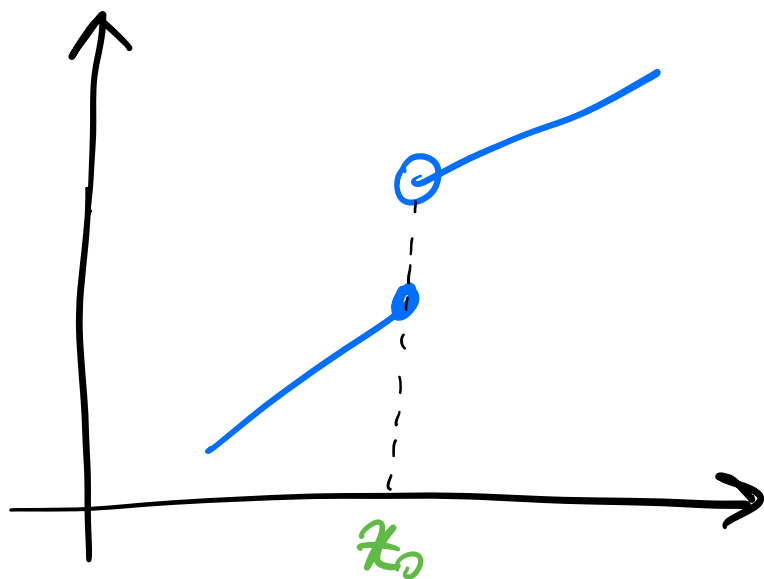
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$$

$$f(x) \in E(f(x_0), \varepsilon) \forall x \in E(x_0, \delta_\varepsilon) \cap I$$

Límite de una función en un punto



← EXISTE EL
LÍMITE
f EN x_0 Y
VALE L



← NO EXISTE EL
LÍMITE
f EN x_0