Introducción a la Teoría de la Información
Primer parcial

24 de marzo de 2025

1. Escribir con lapicera o lápiz con buen contraste, **que se lea bien**.
2. Se pueden usar **ambos lados** de la hoja.
3. **Numerar y escribir nombre y número de cédula en todas las hojas**.
4. $\boxed{4.}$ La partes con número de inciso encuadrado (como este inciso) valen 2 puntos y el resto 1 punto.
5. Se pueden usar todos los resultados vistos en teórico y práctico durante el curso.
6. **Justificar las respuestas**.

Problema:

Sean $\{X_n\}_{n\geq 1}$ y $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ procesos estocásticos independientes entre sí definidos sobre el alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3\}$. Las variables X_n son independientes entre sí, cada una con distribución de probabilidad $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Las variables Y_n son independientes entre sí, cada una con distribución de probabilidad $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$.

Definimos el proceso estocástico $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ de la siguiente manera

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ Y_n, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Dicho de otro modo, para n par Z^n es de la forma $Z^n = X_1, Y_2, X_3, Y_4, \ldots X_{n-1}, Y_n$, y para n impar $Z^n = X_1, Y_2, X_3, \ldots Y_{n-1}, X_n$. Responder **distinguiendo según la paridad de** n siempre que sea necesario:

1. Calcular $D(P||Q)$.
2. Calcular $H(Z_n)$.
3. Calcular $H(Z_n|Z^{n-1})$.
4. $\boxed{4.}$ Calcular $H(Z^n)$.

5. $\boxed{}$ Sea $W \in \mathcal{A}$ una variable aleatoria. Encontrar una cota superior para $H(Z_n, W)$ válida para todo n (dar un número explícitamente), y especificar en qué casos se alcanza la igualdad.

6. $\boxed{}$ Encontrar una cota inferior para $H(Z_n, W)$ válida para todo n (dar un número explícitamente), y especificar en qué casos se alcanza la igualdad.

7. El proceso $\{Z_n\}_{n\geq 1}$, ¿es estacionario?

8. $\boxed{}$ Para cada una de las definiciones de tasa de entropía vistas en el curso determinar si existe y cuánto vale esa tasa para el proceso $\{Z_n\}_{n\geq 1}$.

9. $\boxed{}$ Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, $n \geq 1$. El proceso $\{S_n\}_{n\geq 1}$, ¿es de Markov? ¿Es invariante en el tiempo?

10. El proceso $\{S_n\}_{n\geq 1}$, ¿tiene alguna tasa de entropía?

Solución:

1. $D(P||Q) = \sum_{x\in\mathcal{A}} P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{4}(\log \frac{1}{2} + \log 1 + \log 2 + \log 2) = \frac{1}{4}$.
2. Tenemos
$$H(X_n) = \log |\mathcal{A}| = 2 \text{ bits, y}$$
$$H(Y_n) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{8}\log 8 + \frac{1}{8}\log 8 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{4} \text{ bits.}$$
Por lo tanto se cumple
$$H(Z_n) = \begin{cases} 2 \text{ bits}, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \frac{7}{4} \text{ bits}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$
3. Z_n solo depende de X_n y Y_n, que son independientes de las variables X^{n-1}, Y^{n-1} que determinan Z^{n-1}. En consecuencia $H(Z_n|Z^{n-1}) = H(Z_n)$ porque Z_n es independiente de Z^{n-1}.
4. Si n es par, tenemos $H(Z^n) = H(X_1, X_3, \ldots, X_{n-1}, Y_2, Y_4, \ldots, Y_n)$ que, por la independencia de todas las variables, vale $\frac{n}{2}H(P) + \frac{n}{2}H(Q) = n + n\frac{7}{8} = n\frac{15}{8}$ bits.
Si n es impar, tenemos $H(Z^n) = H(Z^{n-1}) + H(Z_n|Z^{n-1}) = (n-1)\frac{15}{8} + 2 = n\frac{15}{8} + \frac{1}{8}$ bits, donde para la primera igualdad aplicamos la regla de la cadena y para la segunda la parte anterior.
5. Por la cota de independencia tenemos $H(Z_n, W) \leq H(Z_n) + H(W) \leq 4$ bits, con igualdad si n es impar y W tiene distribución uniforme independiente de Z_n.
6. Por la regla de la cadena tenemos $H(Z_n, W) = H(Z_n) + H(W|Z_n) \geq H(Z_n) \geq \frac{7}{4}$ bits, donde usamos la no negatividad de la entropía y la parte 2. La igualdad se da si n es par y W es función de Z_n.

7. El proceso no es estacionario porque, por ejemplo, las distribuciones de probabilidad de Z_1 y Z_2 son P y Q, respectivamente, que son diferentes entre sí.

8. La parte 3 implica que $H(Z_n|Z^{n-1})$ no tiene límite para n tendiendo infinito. Por otro lado la parte 4 implica que

$$\frac{15}{8} \leq \frac{H(Z^n)}{n} \leq \frac{15}{8} + \frac{1}{8n}\,,$$

de donde concluimos que $\frac{H(Z^n)}{n} \to \frac{15}{8}$ cuando $n \to \infty$.

9. Tenemos $S_{n+1} = S_n + Z_n$, $n \geq 1$. Por lo tanto, dado $S^n = s_1\, s_2, \ldots, s_n$, S_{n+1} toma el valor $s_n + Z_n$ que depende de s_n pero no de $s_1\, s_2, \ldots, s_{n-1}$. Esto implica que es Markov, aunque no es invariante en el tiempo porque la distribución de Z_n depende de n.

10. Como S^n es una función biyectiva de Z^n, tenemos $H(S^n) = H(Z^n)$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(S^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{H(Z^n)}{n} = \frac{15}{8}\ \text{bits}\,.$$
