$S^*(f,P)$ $\qquad I^*(f,[a,b]) = \inf\limits_{P\subset[a,b]} S^*(f,P)$

$S_*(f,P)$ $\qquad I_*(f,[a,b]) = \sup\limits_{P\subset[a,b]} S_*(f,P)$

$f$ es integrable $\Leftrightarrow I^*(f,[a,b]) = I_*(f,[a,b])$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists P$ partición de $[a,b]$ tal que $S^*(f,P)-S_*(f,P)\leq\varepsilon$

3.4.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ acotada

a) $\forall\varepsilon>0, \exists P$ partición de $[a,b]$ que cumple $S^*(f,P)-S_*(f,P)\leq\varepsilon$

b) $\forall\varepsilon>0, \forall P$ ______

c) $\exists\varepsilon>0, \exists P$

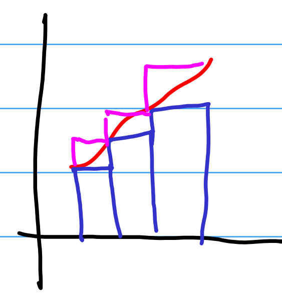
d) $\exists\varepsilon>0, \forall P$

a) $\Rightarrow$ c) $\qquad$ d) $\Leftrightarrow$ c) $\qquad$ a) $\Rightarrow$ d)

b) $\Rightarrow$ a) $\qquad$ b) $\Rightarrow$ c) $\qquad$ b) $\Rightarrow$ d)

a) $\Leftrightarrow f$ es integrable en $[a,b]$

b) $\Leftrightarrow f$ constante en $[a,b]$



Dem $\Rightarrow$ supongamos b)

$\forall\varepsilon>0, \forall P \quad S^*(f,P)-S_*(f,P)\leq\varepsilon$

Tomamos $P=\{a,b\}$ $\quad S^*(f,P)=(b-a)\cdot\sup(f,[a,b])$

$S_*(f,P)=(b-a)\cdot\inf(f,[a,b])$

$0\leq S^*(f,P)-S_*(f,P) = (b-a)\cdot(\sup(f,[a,b])-\inf(f,[a,b])) \leq \varepsilon \quad \forall\varepsilon>0$

Por hipótesis

$\Rightarrow (b-a)\cdot\left(\sup(f,[a,b]) - \inf(f,[a,b])\right) = 0$

$\Rightarrow \sup(f,[a,b]) = \inf(f,[a,b])$

$\Rightarrow f$ constante en $[a,b]$

c) Se cumple siempre

Tomo $\varepsilon = S^*(f,\{a,b\}) - S_*(f,\{a,b\}) + 1$ , $P = \{a,b\}$

$$S^*(f,P) - S_*(f,P) \leq S^*(f,\{a,b\}) - S_*(f,\{a,b\}) + 1 = \varepsilon$$

d) $S^*(f,P) \leq (b-a)\cdot \sup(f,[a,b])$

$P$ una partición cualquiera

$S_*(f,P) \geq (b-a)\cdot \inf(f,[a,b])$

$$S^*(f,P) - S_*(f,P) \leq (b-a)\cdot\left(\sup(f,[a,b]) - \inf(f,[a,b])\right)$$

Tomo $\varepsilon = (b-a)\left(\sup(f,[a,b]) - \inf(f,[a,b])\right) + 1$

d) Se cumple siempre

5. $\left.\begin{array}{l} f \text{ estrictamente creciente en } [a,b] \\ f([a,b]) = [f(a), f(b)] \end{array}\right\} \Rightarrow f$ continua

a) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = b f(b) - a f(a)$

$[\ f : [a,b] \to [f(a), f(b)]]$ estrictamente creciente $\Rightarrow$ inyectiva
sobreyectiva $\rightarrow$ biyectiva

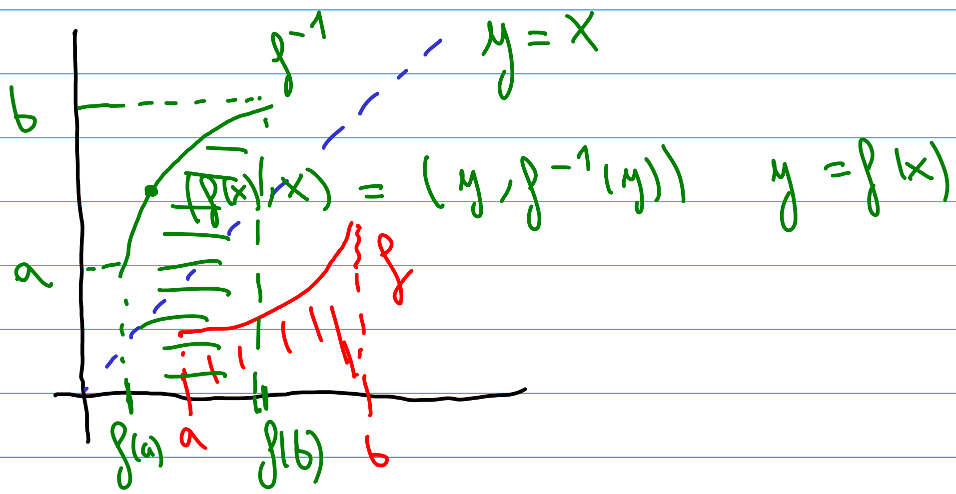
$\Rightarrow$ tiene inversa $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$.

$f$ estrictamente creciente $\Rightarrow$ acotada en $[a,b]$ $\Rightarrow$ integrable

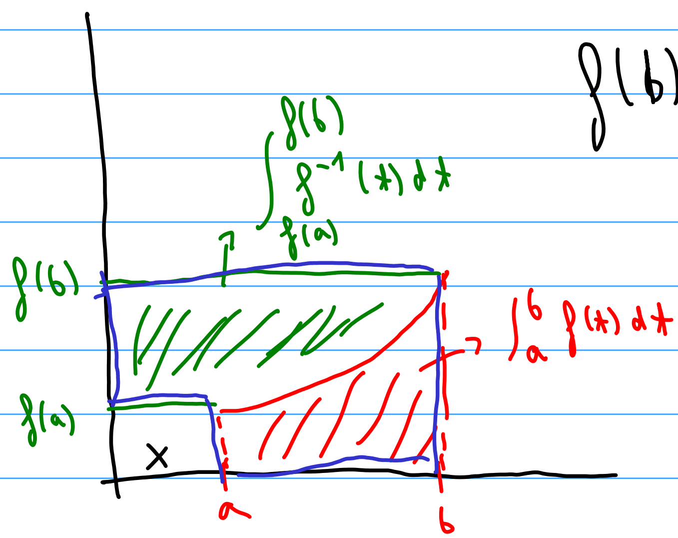
$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

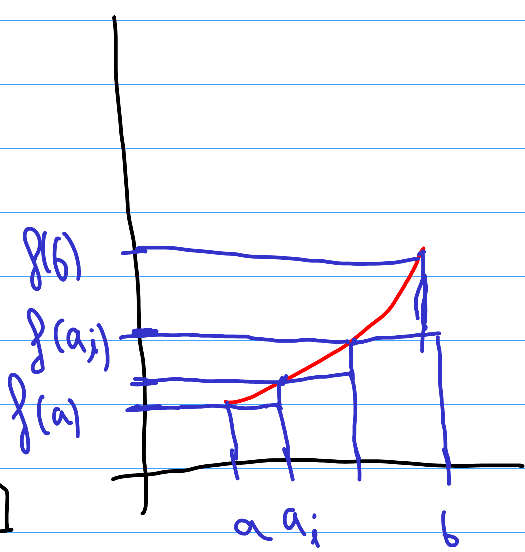
$\Downarrow$

$f^{-1}$ estrictamente creciente $\Rightarrow$ $f^{-1}$ integrable




$f(b)\cdot b - f(a)\cdot a$




Para toda partición $P = \{a_0, \ldots, a_n\}$ de $[a,b]$ obtenemos una partición $f(P) = \{f(a_0), \ldots, f(a_n)\}$ de $[f(a), f(b)]$

y además se cumple $S_*(f,P) + S^*(f^{-1}, f(P)) = f(b)b - f(a)\cdot a$

Dem de la igualdad

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) \inf(f,[a_i,a_{i+1}]) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) f(a_i)$$

$f^{-1}(f(a_{i+1})) = a_{i+1}$
$\parallel$

$$S^*(f^{-1}, f(P)) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(f(a_{i+1}) - f(a_i)\Big) \cdot \sup(f^{-1}, [f(a_i), f(a_{i+1})])$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \cdot a_{i+1}$$

$$S_*(f,P) + S^*(f^{-1}, f(P)) = \cancel{\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} f(a_i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(a_i)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) \cdot a_{i+1} - \cancel{\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\, a_{i+1}} = -a_0 f(a_0)$$

$$+ f(a_n)\, a_n = f(b)\, b - f(a) \cdot a \qquad \blacksquare$$

$$S_*(f,P) = f(b)\, b - f(a)\, a - S^*(f^{-1}, f(P))$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_*(f,[a,b]) = \sup_{P\subset[a,b]} \{ f(b)\, b - f(a)\, a - S^*(f^{-1}, f(P)) \}$$

$$= f(b)\, b - f(a)\, a - \inf_{P\subset[a,b]} S^*(f^{-1}, f(P)) \qquad Q = f(P)$$

$$= f(b)\, b - f(a)\, a - \inf_{Q\subset[f(a),f(b)]} S^*(f^{-1}, Q) = f(b)\, b - f(a)\, a - I^*(f^{-1}, [f(a), f(b)])$$

$P = \{-2, -1, \frac{1}{2}, 2\}$

$S^*(f,P) = 1 \cdot (-5) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-2\right) + \frac{3}{2}4 = -5 - \frac{3}{4} + 6 = \frac{1}{4}$

$S_*(f,P) = 1 \cdot (-8) + \frac{3}{2}(-5) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-2\right) = -8 - \frac{15}{2} - \frac{3}{4}$

$f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$

$f(x) = 1$ si $x \notin \mathbb{Q}$

$1$

$\shortparallel$

$1 = S^*(f,P) = \sum (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup\left(f, [a_i, a_{i+1}]\right)$

inf

$\shortparallel$

$0$

$S_*(f,P) = 0$

$\left|(-1)^n \frac{6n}{n+4}\right| = \frac{6n}{n+4} < 6$

$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$