Continuamos con la prueba de la integrabilidad de las funciones monótonas:

Estamos probando el teorema en el caso que $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona creciente

$\mathcal{P}_n$ es la equipartición en n sub-intervalos iguales y tenemos que:

$$S^*(f,\mathcal{P}_n) - S_*(f,\mathcal{P}_n) = \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n}$$

(Recordemos el criterio de integrabilidad a menos de ε:
Si $\forall \varepsilon>0$, $\exists \mathcal{P}$ partición de $[a,b]$ / $S^*(f,\mathcal{P})-S_*(f,\mathcal{P})<\varepsilon$
$\Longrightarrow$ f es integrable en $[a,b]$)

Para utilizar el criterio, tomamos $\varepsilon>0$ arbitrario, queremos encontrar $\mathcal{P}$ tal que $S^*(f,\mathcal{P})-S_*(f,\mathcal{P})<\varepsilon$

Vamos a encontrar una tal $\mathcal{P}$ que sea una equipartición.

$$S^*(f,\varphi_n) - S_*(f,\varphi_n) = \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n} < \varepsilon \iff$$

$$\boxed{\frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{\varepsilon} < n}$$

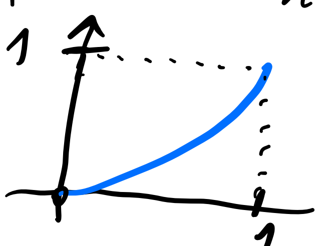
Por lo tanto, si tomamos $N > \dfrac{(f(b)-f(a))(b-a)}{\varepsilon}$

tendremos que $S^*(f,\varphi_n) - S_*(f,\varphi_n) < \varepsilon$ como queríamos.

$\blacksquare$

Veamos cómo sirve lo anterior para aproximar $\int_0^1 x^2\,dx$ dando un "margen de error."

Primero que nada observar que $f(x) = x^2$ es monótona creciente en $[0,1]$. Entonces, la cuenta que hicimos en la prueba nos dice que:

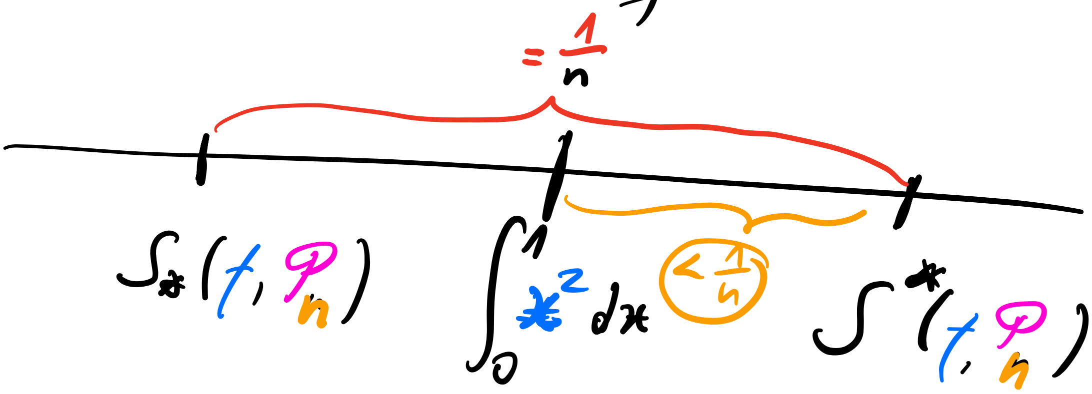


$S^*(x^2, \varphi$

$$S^*(x^2, \mathcal{P}_n) - S_*(x^2, \mathcal{P}_n) = \frac{(f(1) - f(0))(1-0)}{n} =$$

$$= \frac{(1^2 - 0^2)(1-0)}{n} = \frac{1}{n}$$

Entonces, sabemos que



Entonces $S^*(f, \mathcal{P}_n) - \int_0^1 x^2 dx < \frac{1}{n}$

Por lo tanto, $S^*(x^2, \mathcal{P}_{10})$ aproxima $\int_0^1 x^2 dx$ con un error menor a $\frac{1}{10}$

$$\mathcal{P}_{10} = \{ \overset{0}{\overset{\shortparallel}{a_0}}, \overset{\frac{1}{10}}{\overset{\shortparallel}{a_1}}, \overset{2/10}{\overset{\shortparallel}{a_2}}, \ldots\ldots, \overset{9/10}{\overset{\shortparallel}{a_9}}, \overset{\frac{10}{10}}{\overset{\shortparallel}{a_{10}}} \}$$

$$S^*(f, \mathcal{P}_{10}) = \sum_{i=0}^{9} \frac{1}{10} \cdot f(a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{9} \frac{1}{10} \cdot f\left(\frac{i+1}{10}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{9} \frac{1}{10} \cdot \frac{(i+1)^2}{10^2} = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{9} \frac{(i+1)^2}{(10)^2} =$$

$$= \frac{1}{10^3} \sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 = \frac{1}{10^3} \sum_{i=1}^{10} i^2 \overset{(*)}{=}$$

$$\boxed{\text{Fórmula: } \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{10^3} \left(\frac{110 \cdot 21}{6} \right) = \frac{77}{200}$$

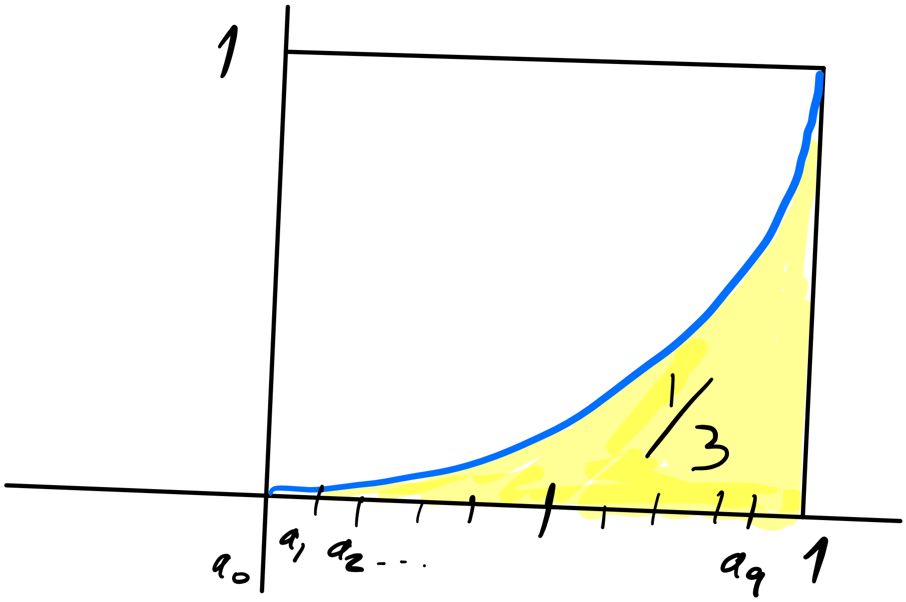
Sabemos que $\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{77}{200}$

con un error menor a $\frac{1}{10}$

Más adelante veremos que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Y en particular $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

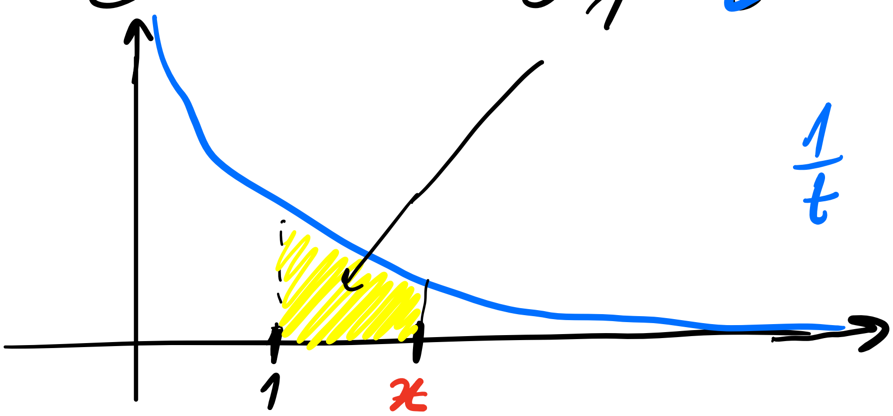


La función logaritmo

$$\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

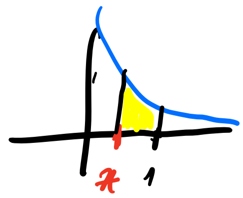
$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Función integral



Ej: $\log(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$

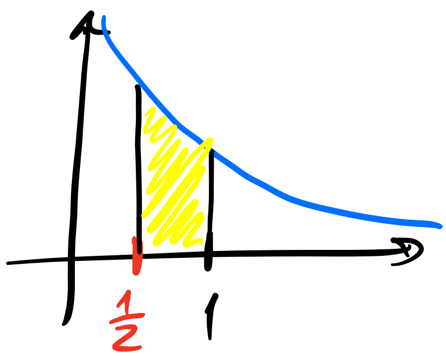
$$\log(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt & \text{si } x \geq 1 \\[2ex] \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\underbrace{\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt}_{>0} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$



Entonces

Sg log $\quad - \; - \; - \; \underset{1}{0} \; + \; + \; + \; + \; +$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^{1/2} \frac{1}{t}\,dt = -\overbrace{\boxed{\int_{1/2}^1 \frac{1}{t}\,dt}}^{>0} < 0$$



$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Veamos que log es estrictamente creciente:

tenemos que ver que si $0 < a < b$

entonces $\log(a) < \log(b)$

$$\log(a) < \log(b).$$

Queremos ver que si $a < b \Longrightarrow$

$$\log(b) - \log(a) > 0 \iff$$

$$\int_1^b \frac{1}{t}\,dt - \int_1^a \frac{1}{t}\,dt = \int_1^b \frac{1}{t}\,dt + \int_a^1 \frac{1}{t}\,dt =$$

aditividad respecto del intervalo

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

$$= \int_a^b \overset{>0}{\frac{1}{t}}\,dt > 0$$

Como $a < b$ y $\frac{1}{t}$ es positiva, obtenemos que $\int_a^b \frac{1}{t}\,dt > 0$

Propiedad importante

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

$$\boxed{\log(x^n)} = \log(x) + \log(x^{n-1}) =$$

$$\boxed{x\,(x^{n-1})} = \log(x) + \log(x) + \log(x^{n-2}) =$$

$$= \ldots = \underbrace{\log(x) + \ldots + \log(x)}_{n \text{ veces}} =$$

$$= \boxed{n \cdot \log(x)}$$

$$\log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log(1) = 0$$

también $\log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \overbrace{\log(x) + \log\left(\frac{1}{x}\right)}^{=}$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$$

$$\boxed{\log\left(x/y\right)} = \log\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) =$$

$$= \log(x) + \log\left(\frac{1}{y}\right) = \boxed{\log(x) - \log(y)}$$