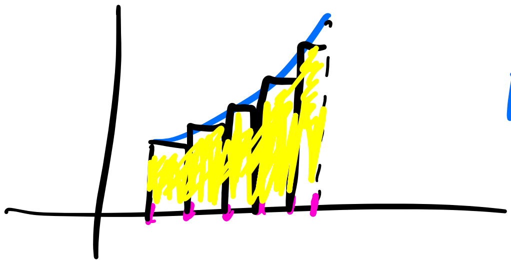
Criterio de integrabilidad a menos de ε

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ acotada. Entonces:

f es integrable $\underset{(\Leftarrow)}{\text{sii}}$ $\forall \varepsilon>0,\ \exists P$ partición de $[a,b]$ /

$$S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$$

Recordamos:



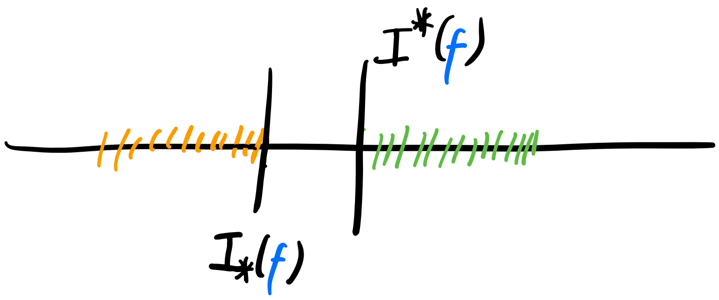
$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$

$\mathcal{A}_*(f)=\{S_*(f,P):\ P$ partición de $[a,b]\}$

$\mathcal{A}^*(f)=\{S^*(f,P):\ P$ — " — " — " — $\}$

$I_*(f)=\sup\mathcal{A}_*(f)$

$I^*(f)=\inf\mathcal{A}^*(f)$



Cuando $I_*(f)=I^*(f)$ decimos que f es integrable y definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx=I_*(f)\ \left(=I^*(f)\right)$$

Demostración de $(\Leftarrow)$

Asumimos que $\forall\varepsilon>0,\ \exists P$ partición de $[a,b]$ /

$$S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$$

y queremos probar que entonces $I_*(f) = I^*(f)$

Sabemos que $I_*(f) \leq I^*(f) \Rightarrow 0 \leq I^*(f) - I_*(f)$

Para ver que $I^*(f) - I_*(f) = 0$ veremos que

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

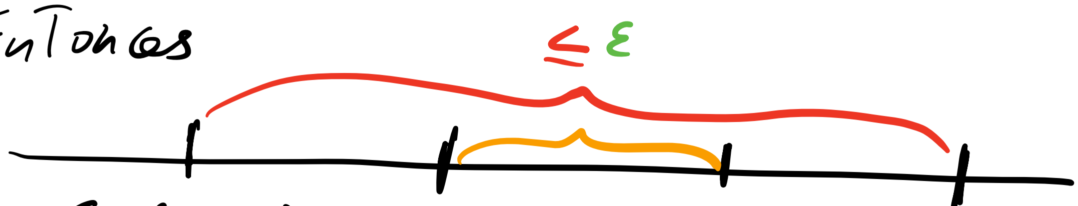
Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario, por hipótesis,

$\exists$ P partición de $[a,b]$ / $S^*(f,P) - S_*(f,P) \leq \varepsilon$

Por otro lado, $S_*(f,P) \leq I_*(f)$

$$I^*(f) \leq S^*(f,P)$$

Entonces



$$S_*(f,P) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S^*(f,P)$$

lo que implica, que $\boxed{I^*(f) - I_*(f) \leq \varepsilon}$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que

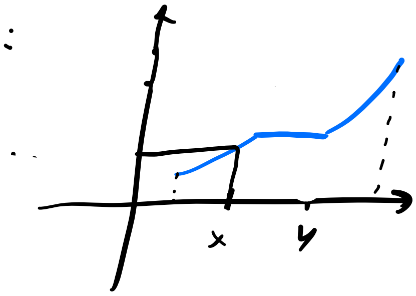
$$I^*(f) - I_*(f) = 0 \Longrightarrow I^*(f) = I_*(f)$$

$\Longrightarrow$ f es integrable.

Definición: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ es

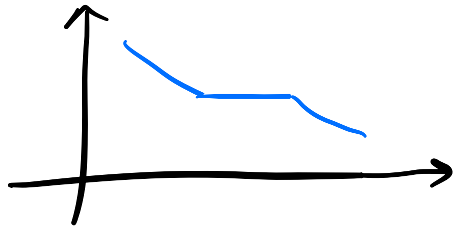
- monótona creciente si:

  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$



- monótona decreciente si

  $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$



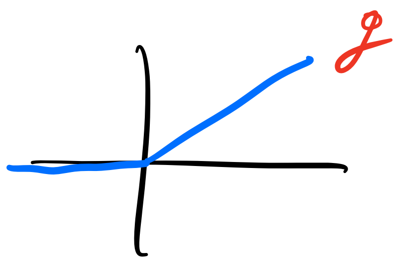
- monótona si es monótona creciente o monótona decreciente

Ej:

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = x$

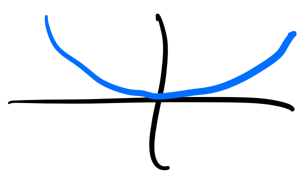
  es monótona creciente

- $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$



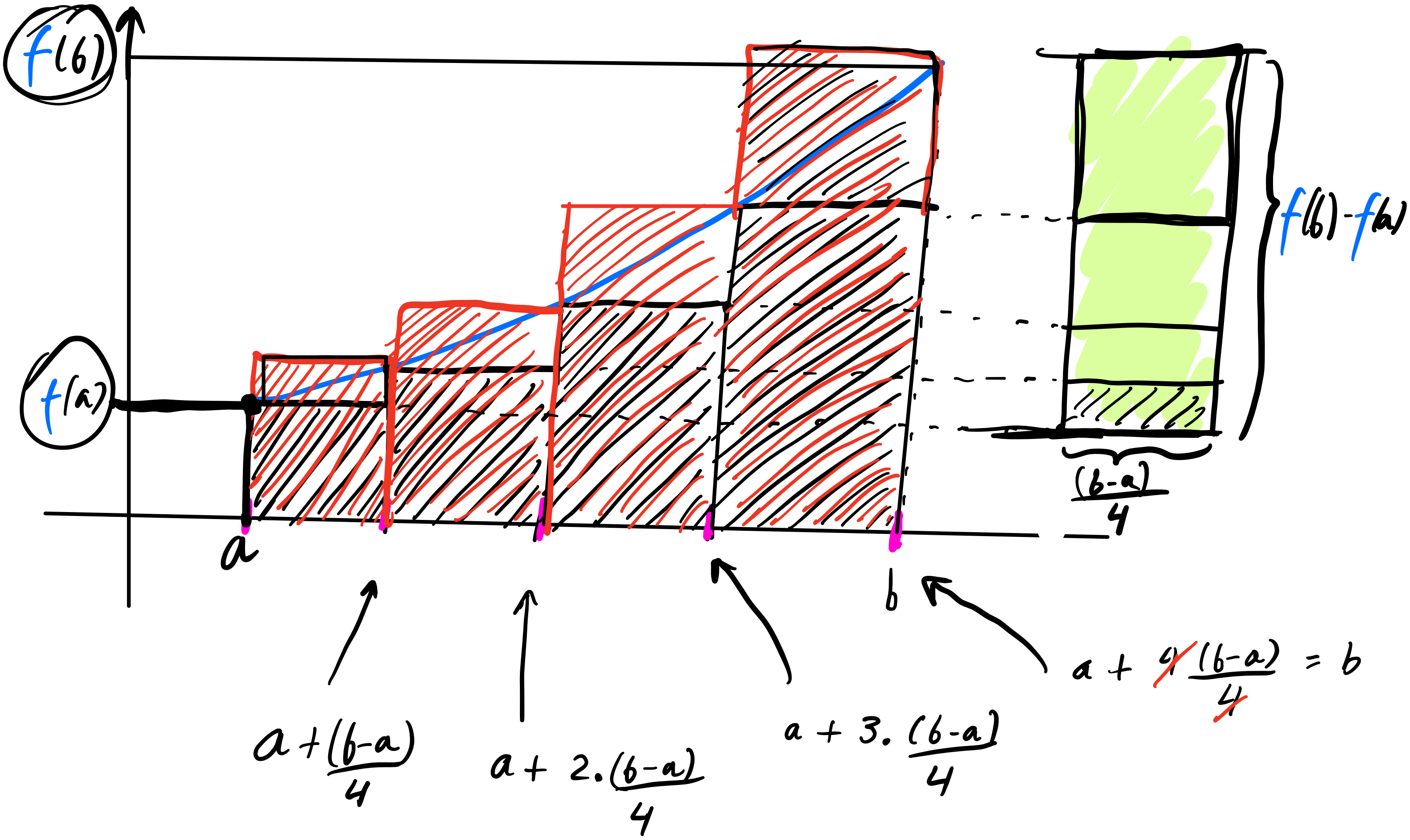
es monótona creciente
$\Rightarrow$ es monótona

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$



no es monótona decreciente ni monótona creciente
$\Rightarrow$ no es monótona

Teorema: Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona. Entonces f es integrable.



$$P_4 = \left\{ a+0.\frac{(b-a)}{4},\ a+1.\frac{(b-a)}{4},\ a+2.\frac{(b-a)}{4},\ a+3\frac{(b-a)}{4},\ a+4\frac{(b-a)}{4} \right\}$$

En este caso $\boxed{S^*(f,P_4)-S_*(f,P_4) = (f(b)-f(a))\frac{(b-a)}{4}}$

Demostración: Supongamos que f monótona creciente. Consideremos la equipartición en n sub-intervalos iguales del intervalo $[a,b]$.

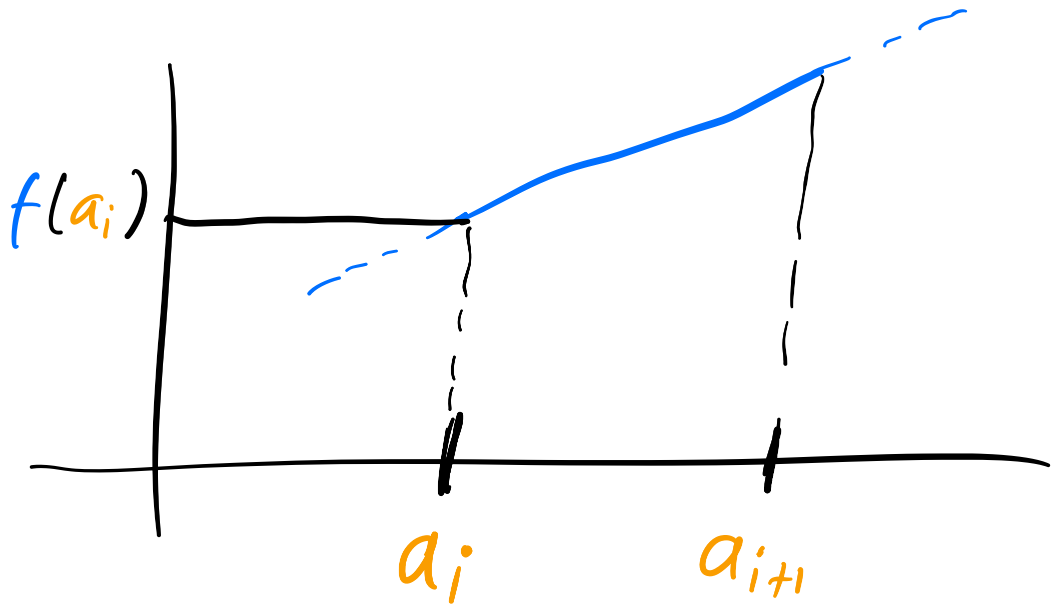
$$\mathcal{P}_n = \Big\{ \overbrace{\underbrace{a + 0.\frac{(b-a)}{n}}_{a_0}}^{a} \, , \, \underbrace{a + 1.\frac{(b-a)}{n}}_{a_1} \, , \, \underbrace{a + 2\frac{(b-a)}{n}}_{a_2} \, , \, \ldots \ldots$$

$$\ldots \, , \, \underbrace{a + (n-1)\frac{(b-a)}{n}}_{a_{n-1}} \, , \, \underbrace{\overbrace{a + n.\frac{(b-a)}{n}}^{}_{\overset{\shortparallel}{b}}}_{a_n} \Big\}$$

$$S_*(f, \mathcal{P}_n) = \frac{(b-a)}{n} \inf\left(f, [a_0, a_1]\right) +$$

$$+ \frac{(b-a)}{n} \inf\left(f, [a_1, a_2]\right) +$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{(b-a)}{n} \inf\left(f, [a_{n-1}, a_n]\right)$$



Como f es monótona creciente

$$\inf\left(f, [a_i, a_{i+1}]\right) = \inf\{f(x) : x \in [a_i, a_{i+1}]\} = f(a_i)$$

$$\sup(f,[a_i,a_{i+1}]) = f(a_{i+1})$$

Entonces

$$S_*(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} \cdot \overbrace{\inf(f,[a_i,a_{i+1}])}^{f(a_i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f(a_i) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)$$

Análogamente:

$$S^*(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f(a_{i+1}) =$$

$$= \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1})$$

$$S^*(f,\mathcal{P}_n) - S_*(f,\mathcal{P}_n) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) = \boxed{\cancel{f(a_1)} + \cancel{f(a_2)} + \cancel{f(a_3)} + \dots + \cancel{f(a_{n-1})} + f(a_n)}$$

$$-$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = \boxed{f(a_0) + \cancel{f(a_1)} + \cancel{f(a_2)} + \dots + \cancel{f(a_{n-2})} + \cancel{f(a_{n-1})}}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = f(a_n) - f(a_0)}$$

Resumiendo

$$S^*(f, \mathcal{P}_n) - S_*(f, \mathcal{P}_n) = \frac{\big(f(a_n) - f(a_0)\big)(b-a)}{n} =$$

$$= \frac{\big(f(b) - f(a)\big)(b-a)}{n}$$

Continuará....