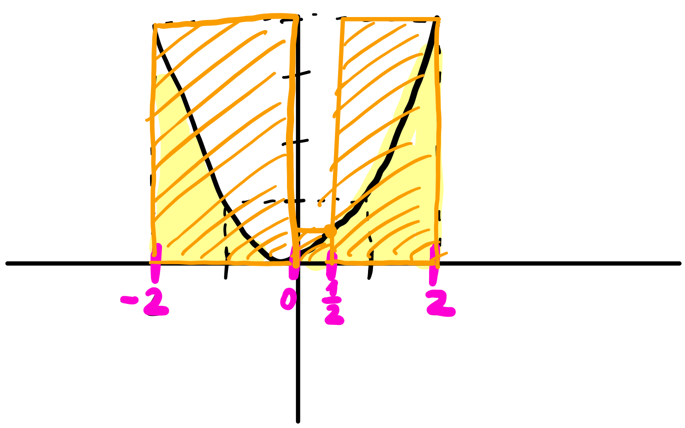
$f: [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$

$$\boxed{\int_{-2}^{2} f(x)\,dx} = \ ?$$



$$P = \left\{-2,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 2\right\}$$

$$\int^{*}(f, P) =$$

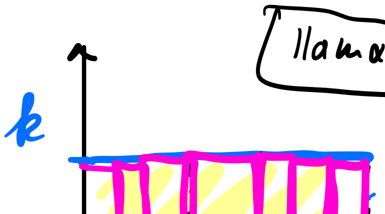
$$(0-(-2))\underbrace{\overbrace{\sup(f,[-2,0])}^{4}}_{=} + \left(\tfrac{1}{2}-0\right)\overbrace{\sup\left(f,\left[0,\tfrac{1}{2}\right]\right)}^{\frac{1}{4}} + \left(2-\tfrac{1}{2}\right)\overbrace{\sup\left(f,\left[\tfrac{1}{2},2\right]\right)}^{4} =$$

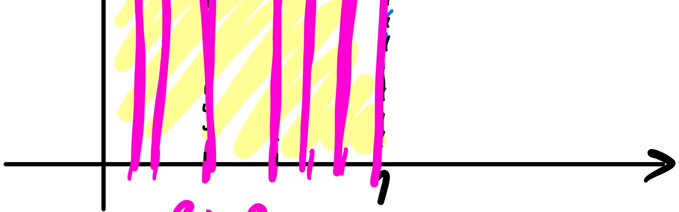
$$\sup\{f(x) : x \in [-2,0]\} = f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$= \boxed{2 \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2} \cdot 4}$$

Calcular $\int_0^1 k\,dx \overset{?}{=} k$ $\quad k$ (constante)

llamamos f a la función constante k





$$A_*(f) = \left\{ S_*(f, P) : P \text{ particiones del } [0,1] \right\}$$

$$P = \{ \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_0}, \dots, \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{a_n} \} \quad \text{partición de } [0,1]$$

$$S_*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \underbrace{\inf(f, [a_i, a_{i+1}])}_{\substack{\shortparallel \\ \inf\{f(x) : x \in [a_i, a_{i+1}]\} \\ \shortparallel \\ \inf\{k\} = k}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, k = k \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} - a_i}_{=1} = k$$

$$\begin{aligned} &\cancel{a_1} - a_0 \\ + &\cancel{a_2} - \cancel{a_1} \\ + &\cancel{a_3} - \cancel{a_2} \\ &\vdots \\ &a_n - \cancel{a_{n-1}} \end{aligned}$$

$$A_*(f) = \{k\} \Rightarrow I_*(f) = \sup A_*(f) = k$$

$\ldots \{ \ldots \} \Rightarrow I_*(f) \ldots (f) = k$

De la misma manera vemos que

$$\mathcal{A}^*(f) = \{k\} \Rightarrow I^*(f) = k$$

Entonces $I_*(f) = I^*(f) \Rightarrow f$ es integrable

y $\displaystyle\int_0^1 k \, dx = I_*(f) = I^*(f) = k$

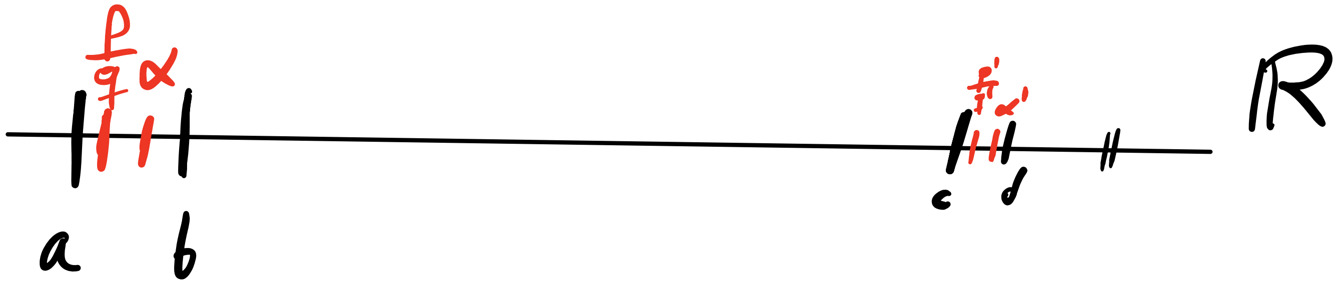
<u>Un ejemplo de una función no integrable</u>

Propiedad de densidad de los números racionales e irracionales.

$\forall \; a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

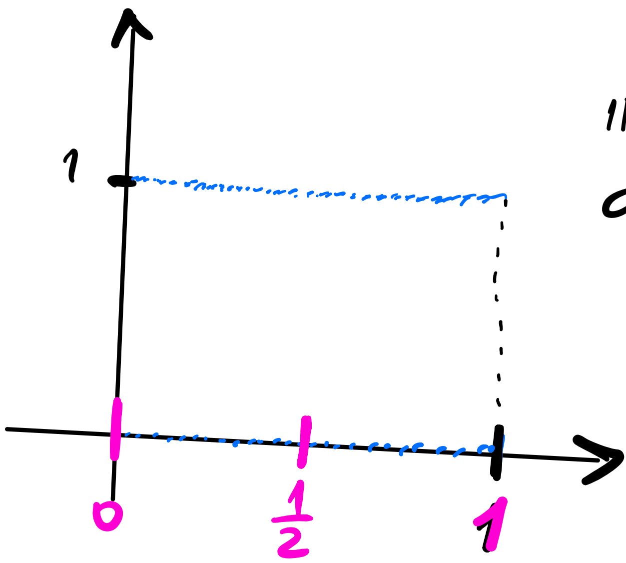
se cumplen:

- $\exists \; \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \; / \; a < \frac{p}{q} < b$
- $\exists \; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \; / \; a < \alpha < b$



Función de Dirichlet $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 1 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$



"gráfico de la función de Dirichlet"

$$P=\left\{0,\ \tfrac{1}{2},\ 1\right\}$$

$$S_*(f,P)=\left(\tfrac{1}{2}-0\right)\underbrace{\inf\left(f,[0,\tfrac{1}{2}]\right)}_{=\inf\{f(x):\,x\in[0,\frac{1}{2}]\}=\inf\{0,1\}=0}+\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\underbrace{\inf\left(f,[\tfrac{1}{2},1]\right)}_{=0}$$

densidad de los racionales y de los irracionales

$$= \left(\frac{1}{2} - 0\right) . 0 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) . 0 = 0$$

$P = \{\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_0}, \dots, \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{a_n}\}$ partición cualquiera del $[0,1]$

$$S_*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \underbrace{\inf\left(f_{|[a_i, a_{i+1}]}\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$

Entonces $\mathcal{A}_*(f) = \{0\} \Rightarrow I_*(f) = 0$

De la misma manera

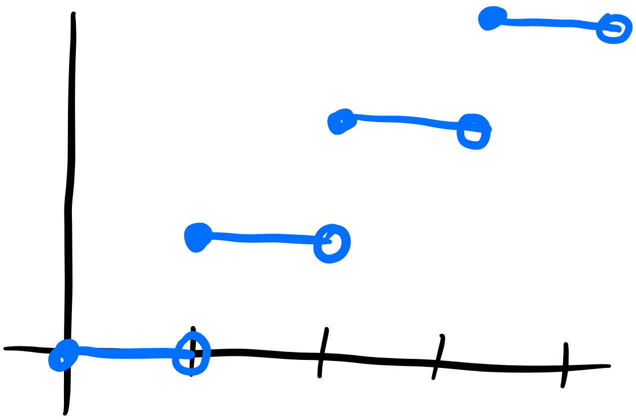
$\mathcal{A}^*(f) = \{1\} \Rightarrow I^*(f) = 1$

Como $I_*(f) \neq I^*(f)$ la f

no es integrable.

Ej: La función parte entera

$\lfloor x \rfloor : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$



es integrable.

Propiedades de la integral

Linealidad de la integral

Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables

- Entonces $f+g$ es integrable y

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

"la integral de la suma es la suma de las integrales"

Ejemplo: $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$; $\int_1^2 g(x)\,dx = 3$

$$\Longrightarrow \int^2 (f+g)(x)\,dx = 2+3 = 5$$

$\int_1 (f+g)(x)\,dx = 2+3 = 5$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf es integrable y

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

"las constantes multiplicando salen para afuera de la integral"

Para la resta:

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x) + (-1)\cdot g(x)\,dx =$$

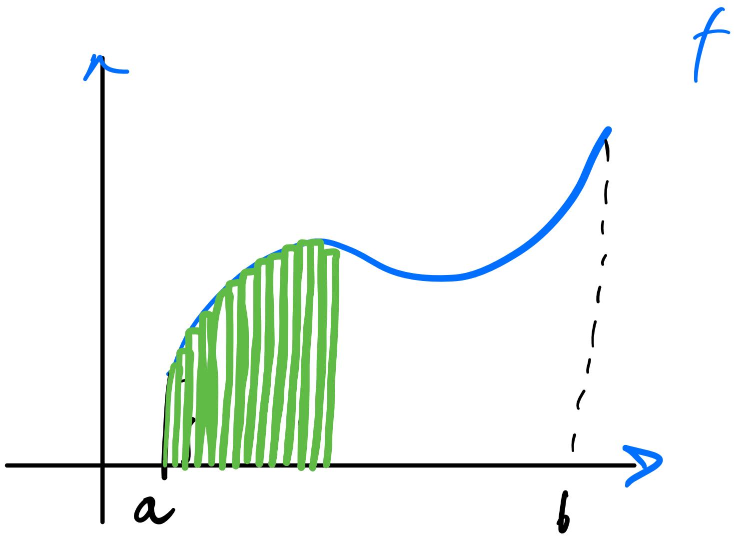
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (-1) g(x)\,dx =$$

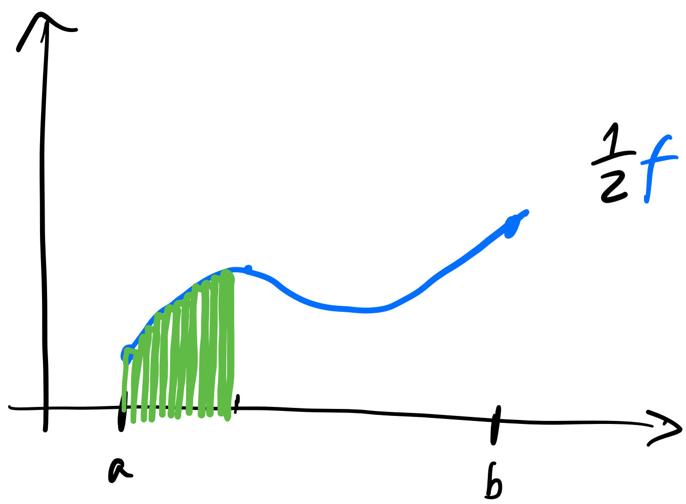
$$= \int_a^b f(x)\,dx + (-1)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

<u>Ejercicio</u>: Encontrar un ejemplo donde se vea que $\int_a^b f\cdot g \neq \left(\int_a^b f\right)\cdot\left(\int_a^b g\right)$

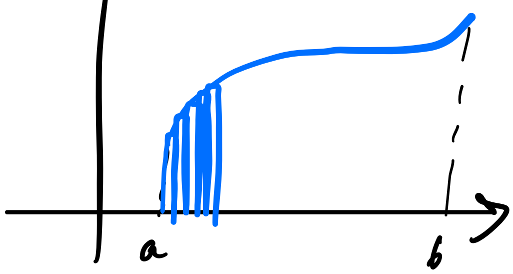
$$\int_a^b \frac{f}{g} \neq \left(\int_a^b f\right) \Big/ \int_a^b g$$

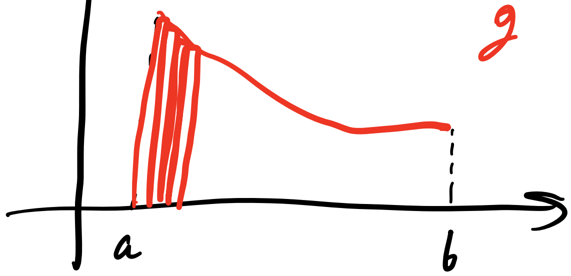
¿Porqué es cierta la linealidad de la integral?

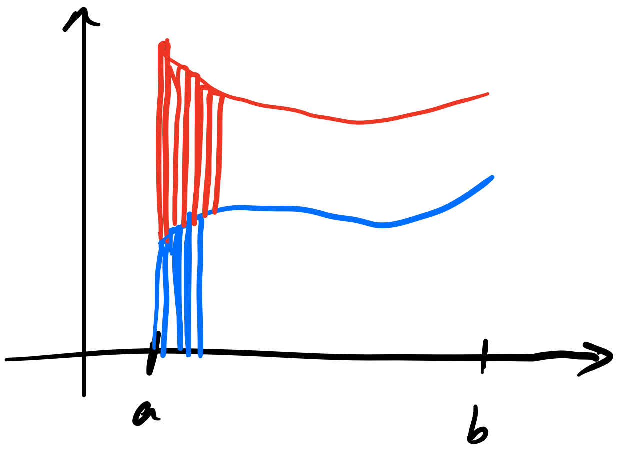




"es el gráfico de f contraido por un factor de $\frac{1}{2}$ en la dirección del eje y"







Aditividad respecto del intervalo

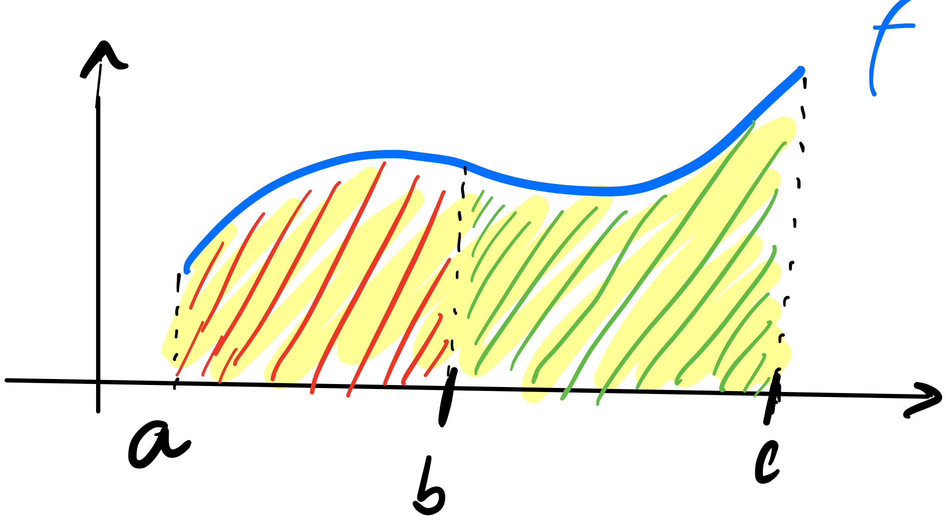
Sea $a < b < c$ números reales y $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable.

Entonces:

$f\big|_{[a,b]}$ y $f\big|_{[b,c]}$ son integrables y

restringir el dominio el intervalo $[a,b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx}$$



f
a
b
c