SimSEE

Optimización I

... en pocas palabras

Ruben Chaer 18 de Marzo 2025
Curso SimSEE - IIE-FING-UdeLaR
Montevideo - Uruguay

Planteo del PROBLEMA

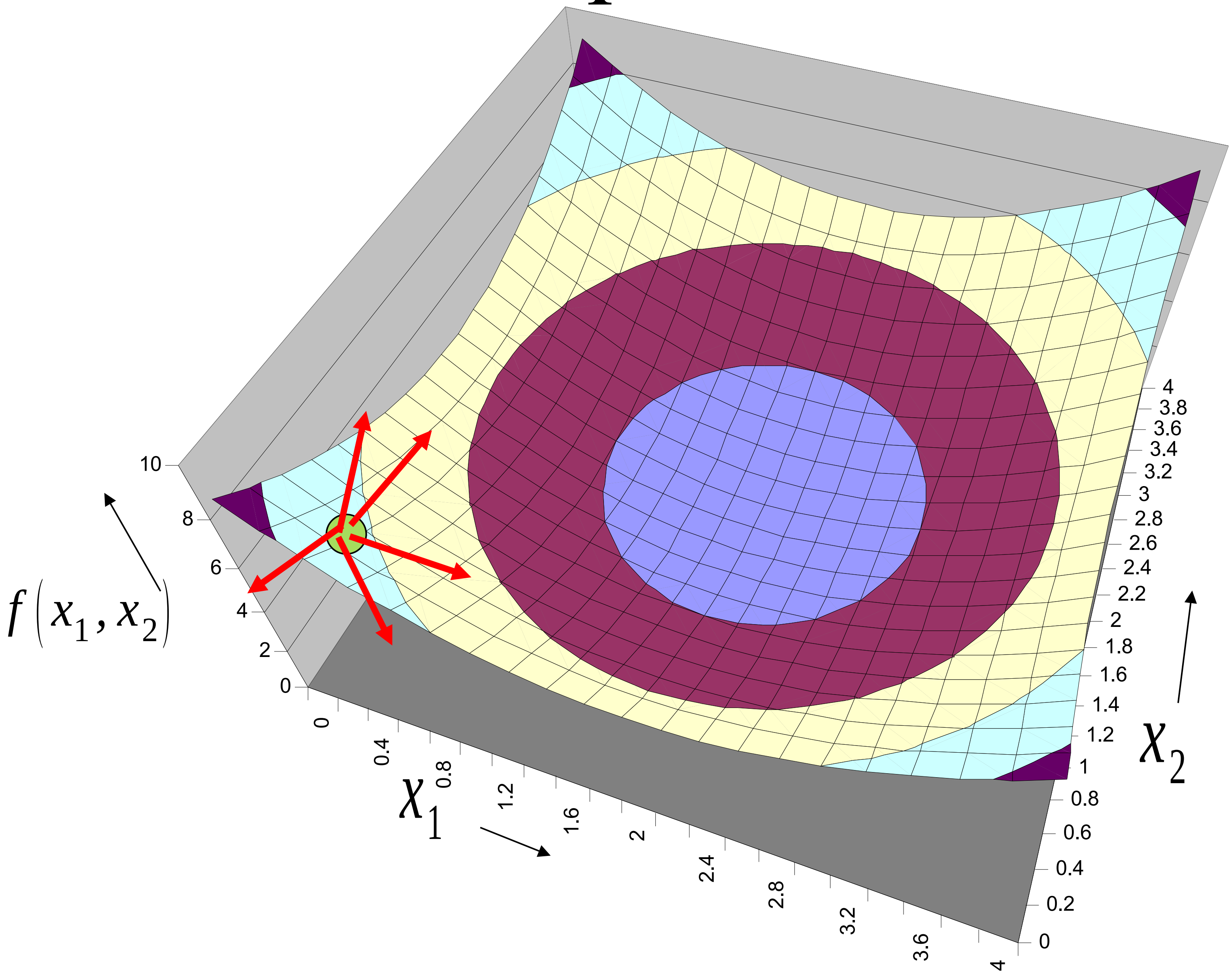
$$\underset{x \in D}{\text{mín}} \; f(x)$$

$f : D \rightarrow R$ Función de costo

$D \subset R^n$ Dominio

SimSEE

Búsqueda Local



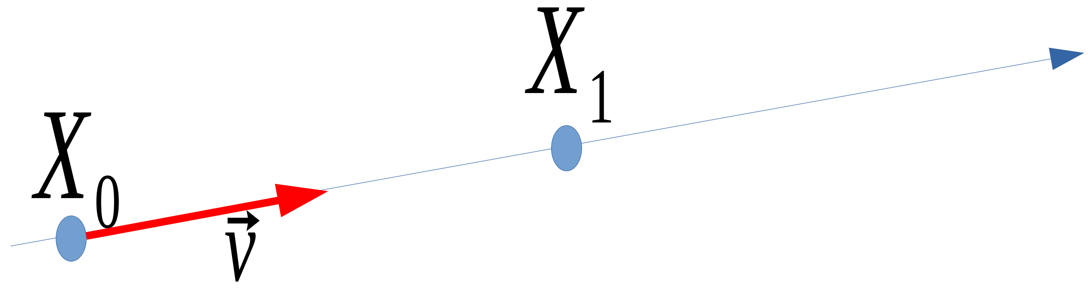
Búsqueda Local

Búsqueda Local Lineal

$$X_0; f(X_0)$$

Punto inicial interior
al dominio D

$$X_1 = X_0 + \vec{v} \cdot d$$



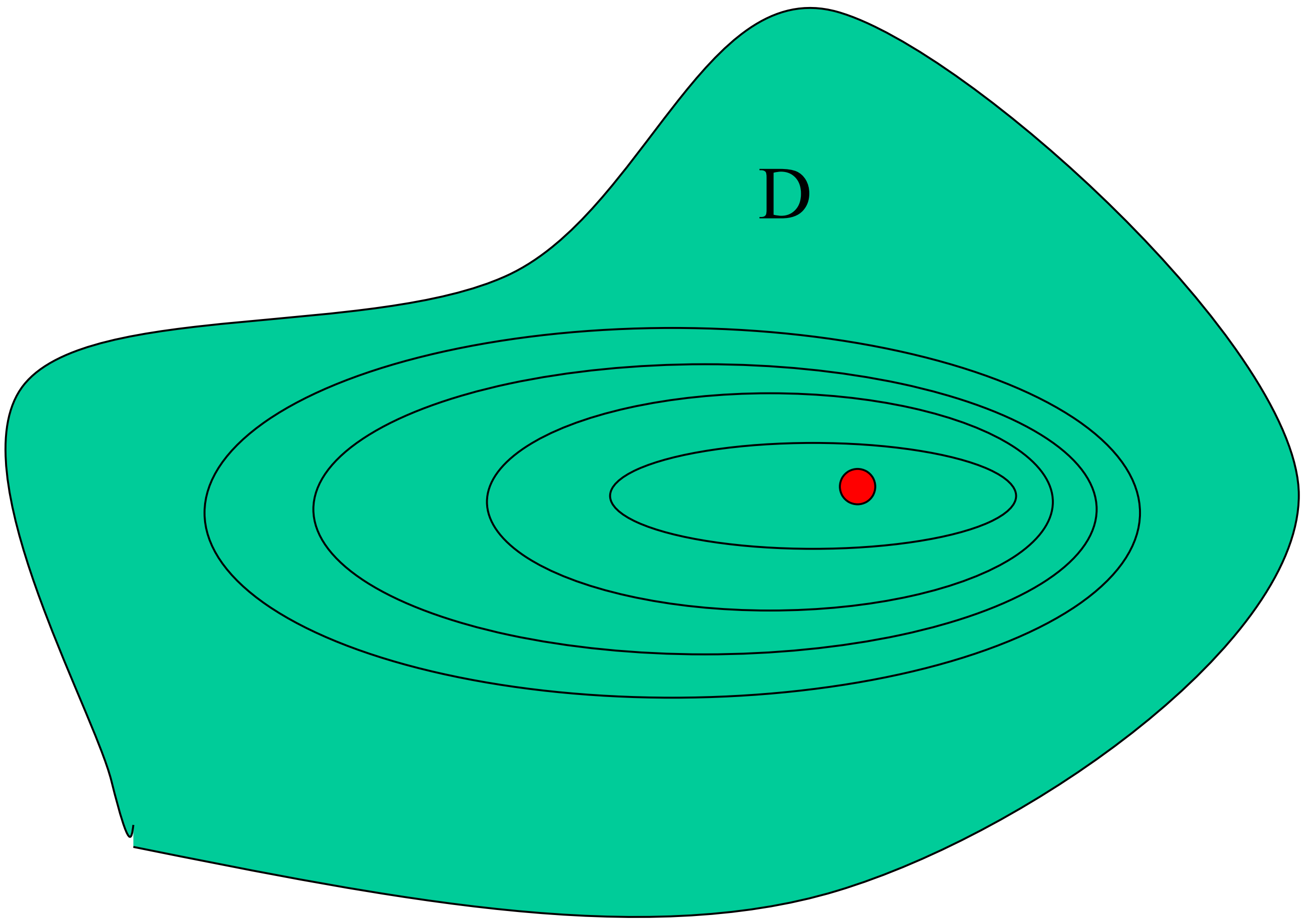
$$d \in R \,/\, f(X_1) < f(X_0) \;\; y \;\; X_1 \in D$$

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$$

Dirección de bajada
en un entorno de X_0

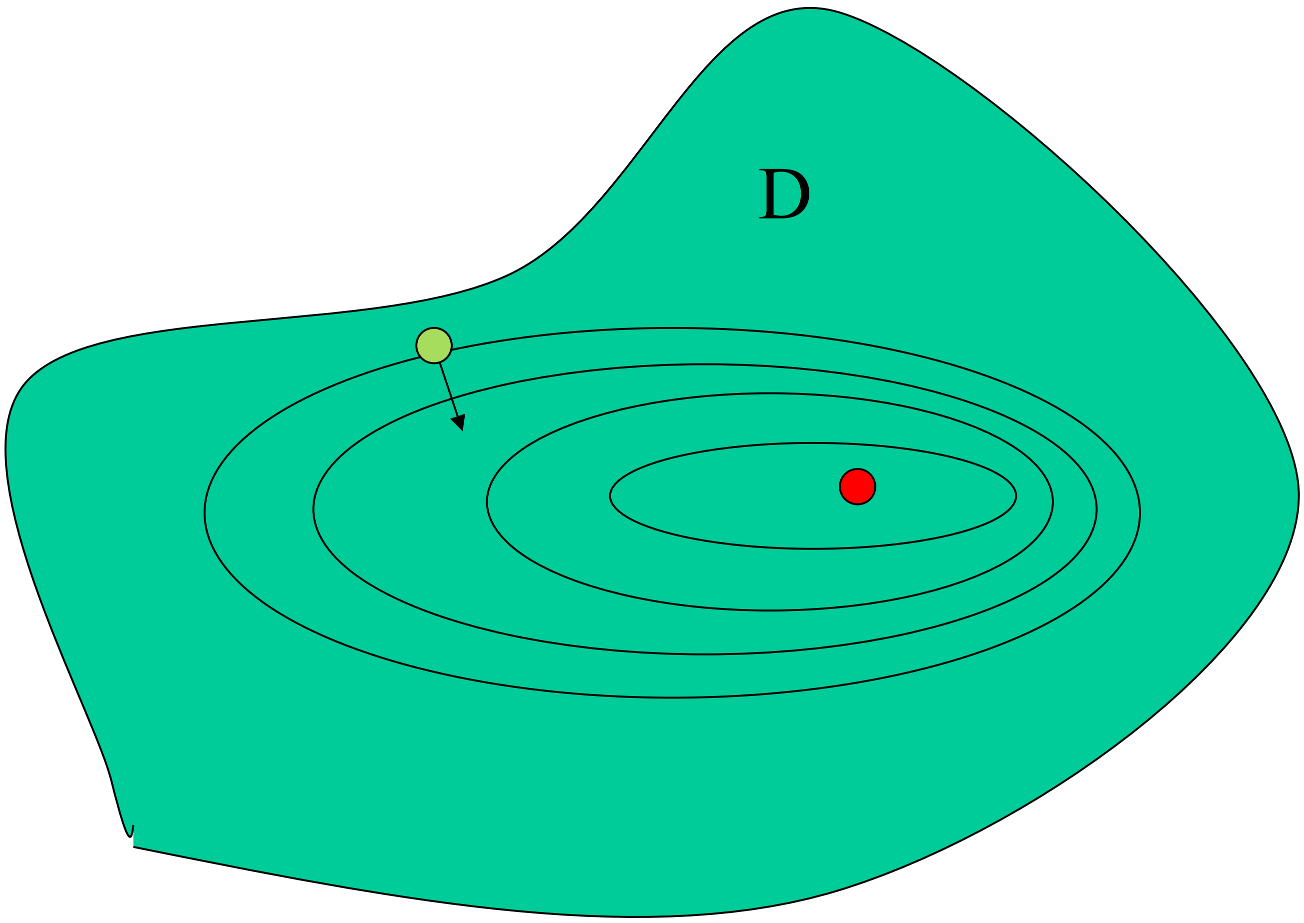
Búsqueda lineal del mínimo.

Ejemplo 1) Mínimo interior al Dominio

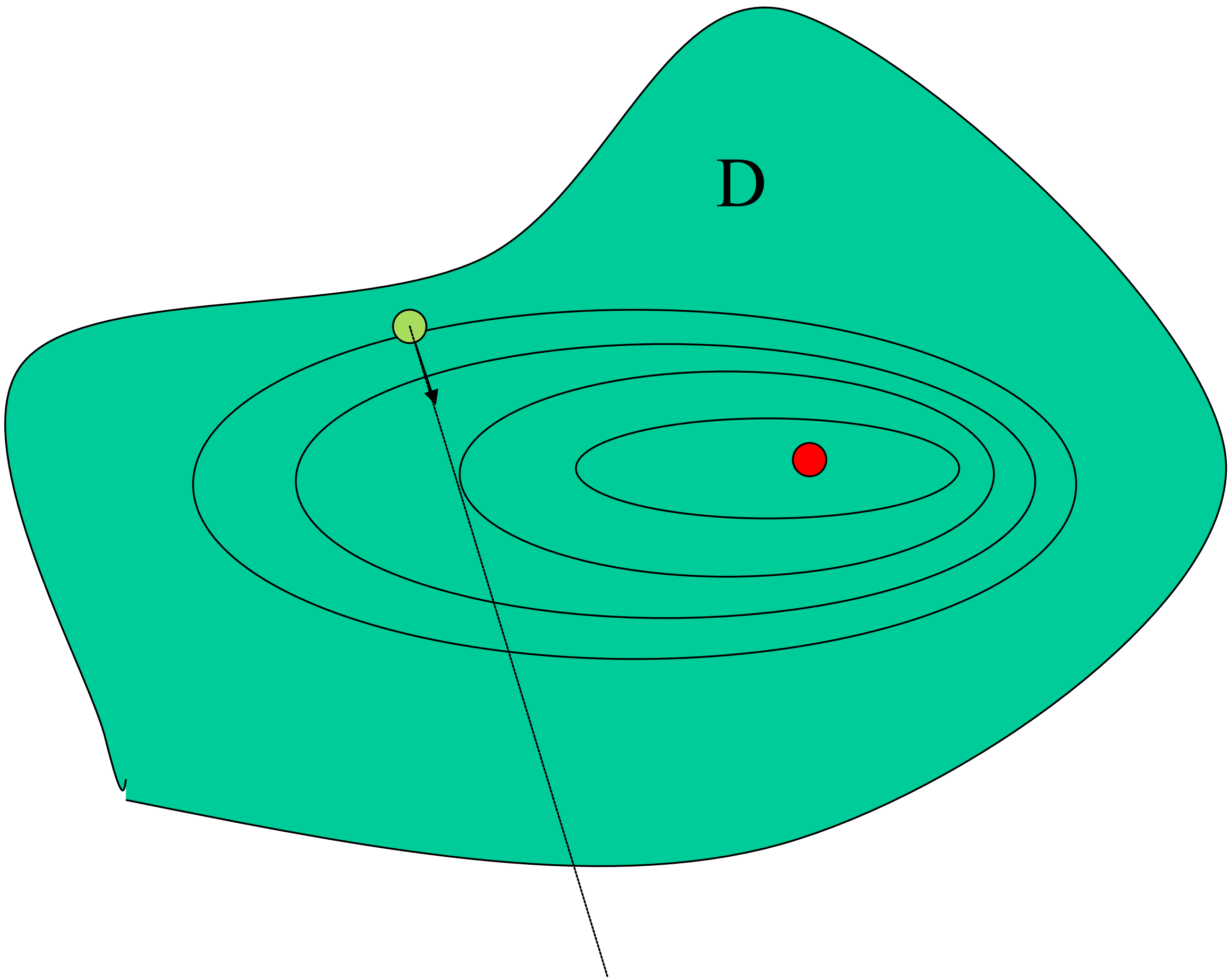


SimSEE

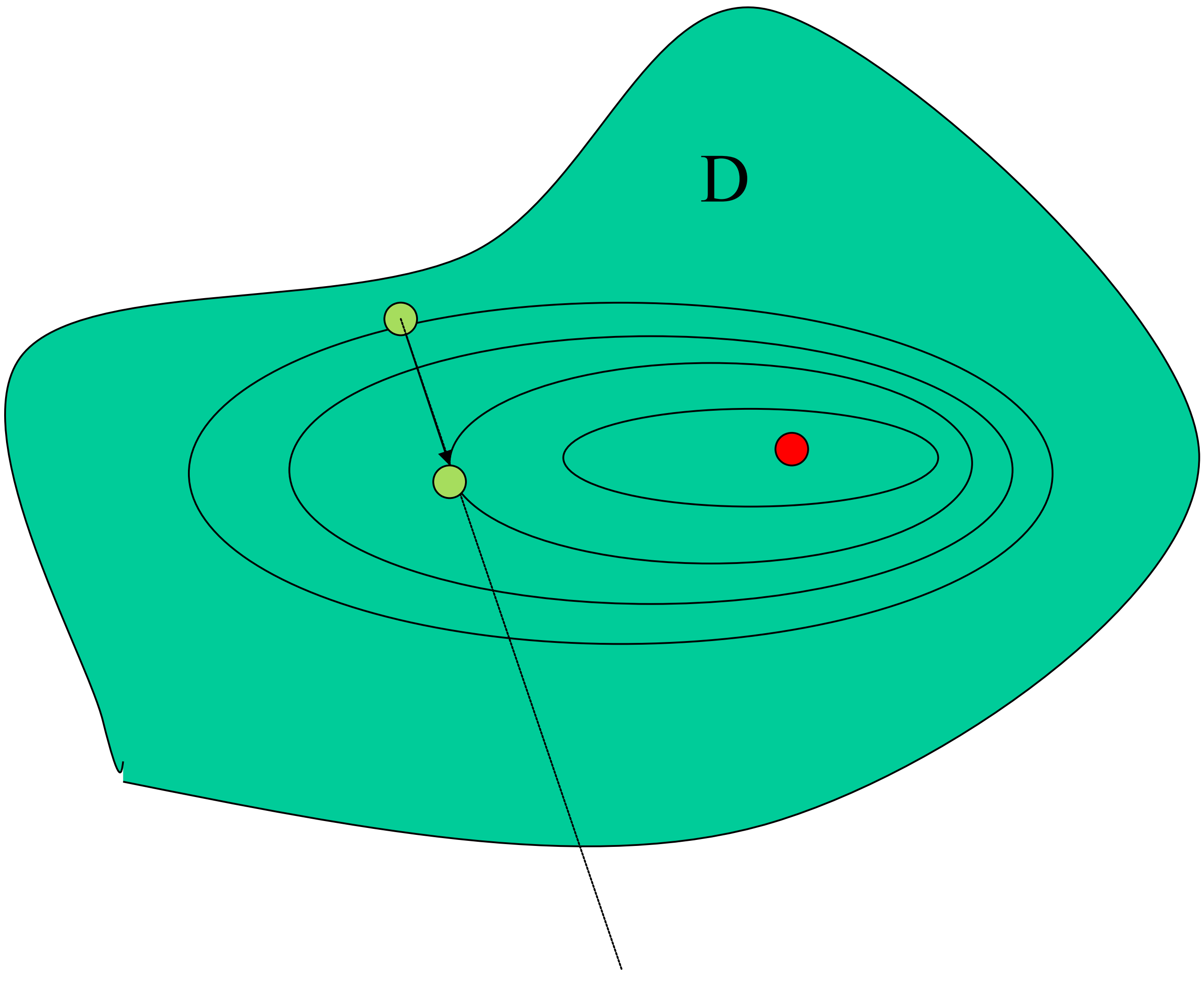
Búsqueda lineal del mínimo.



Búsqueda lineal del mínimo.

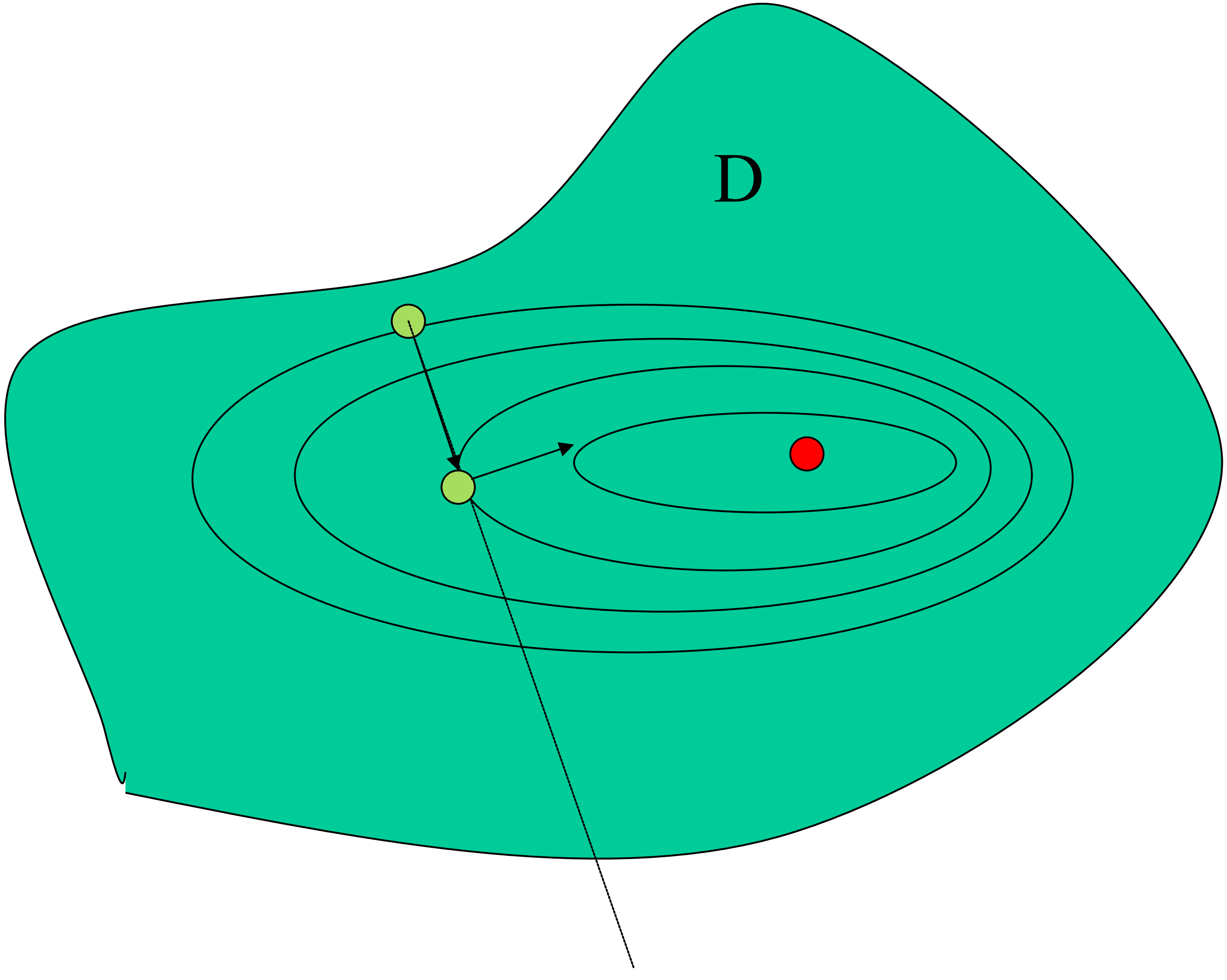


Búsqueda lineal del mínimo.

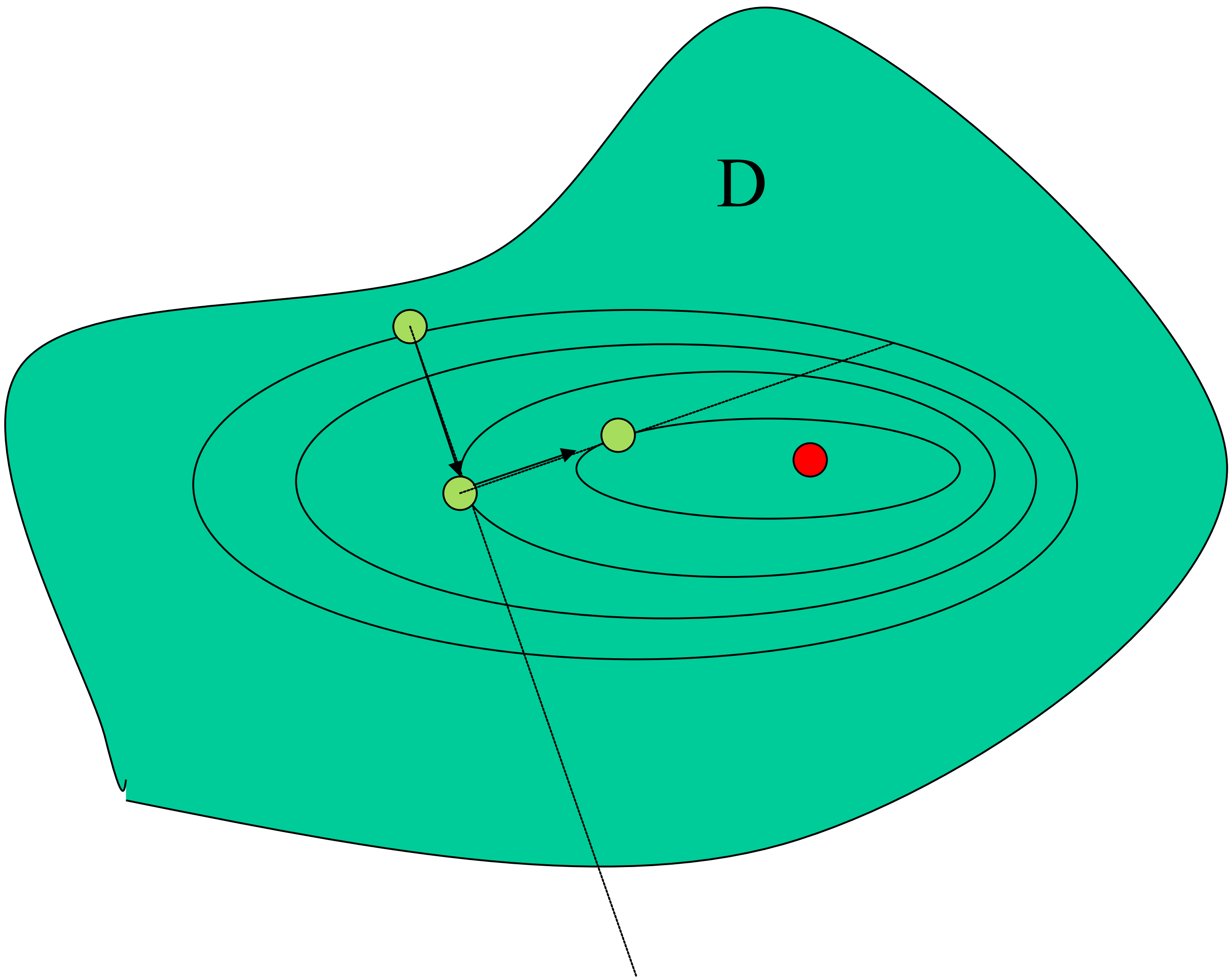


SimSEE

Búsqueda lineal del mínimo.

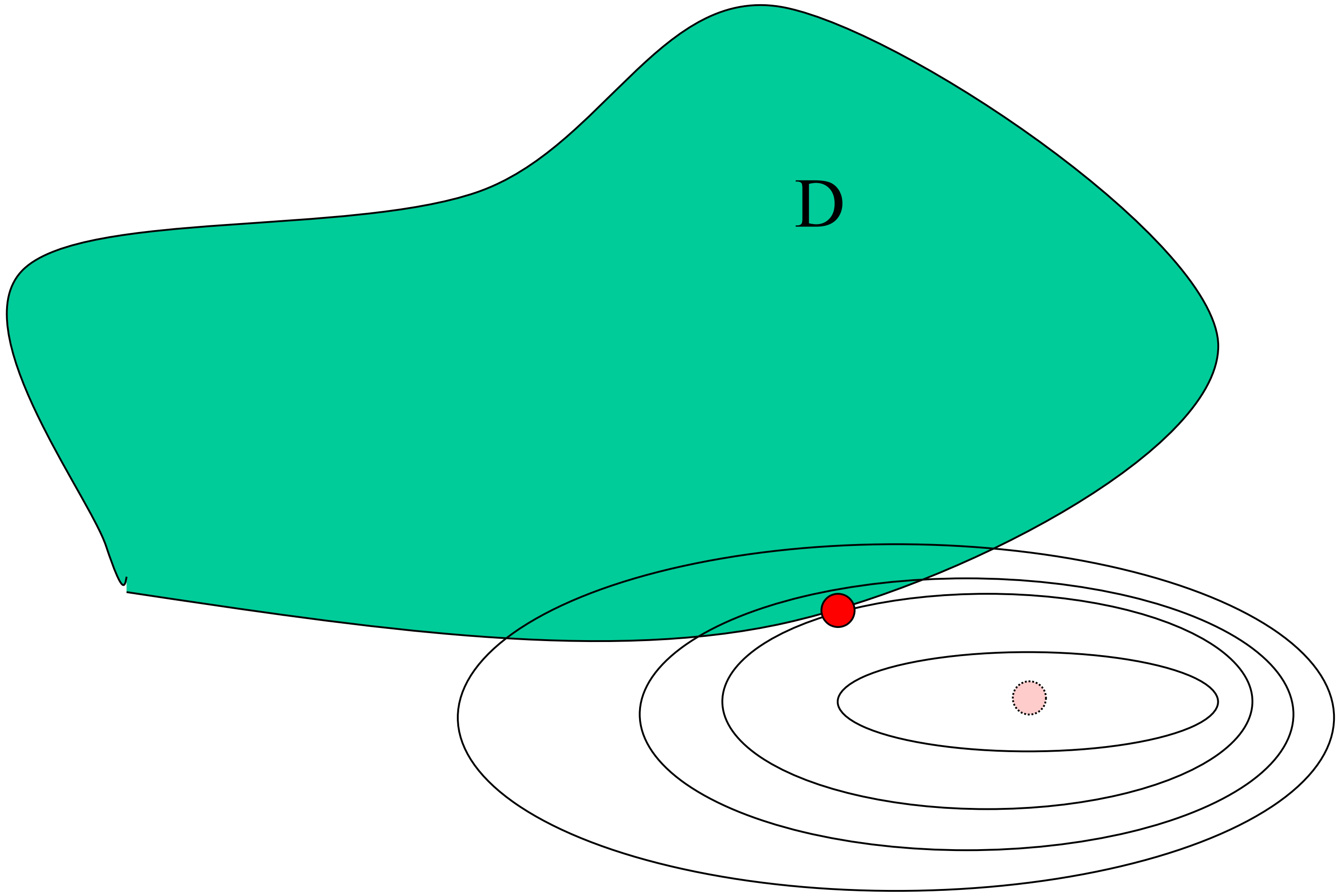


Búsqueda lineal del mínimo.

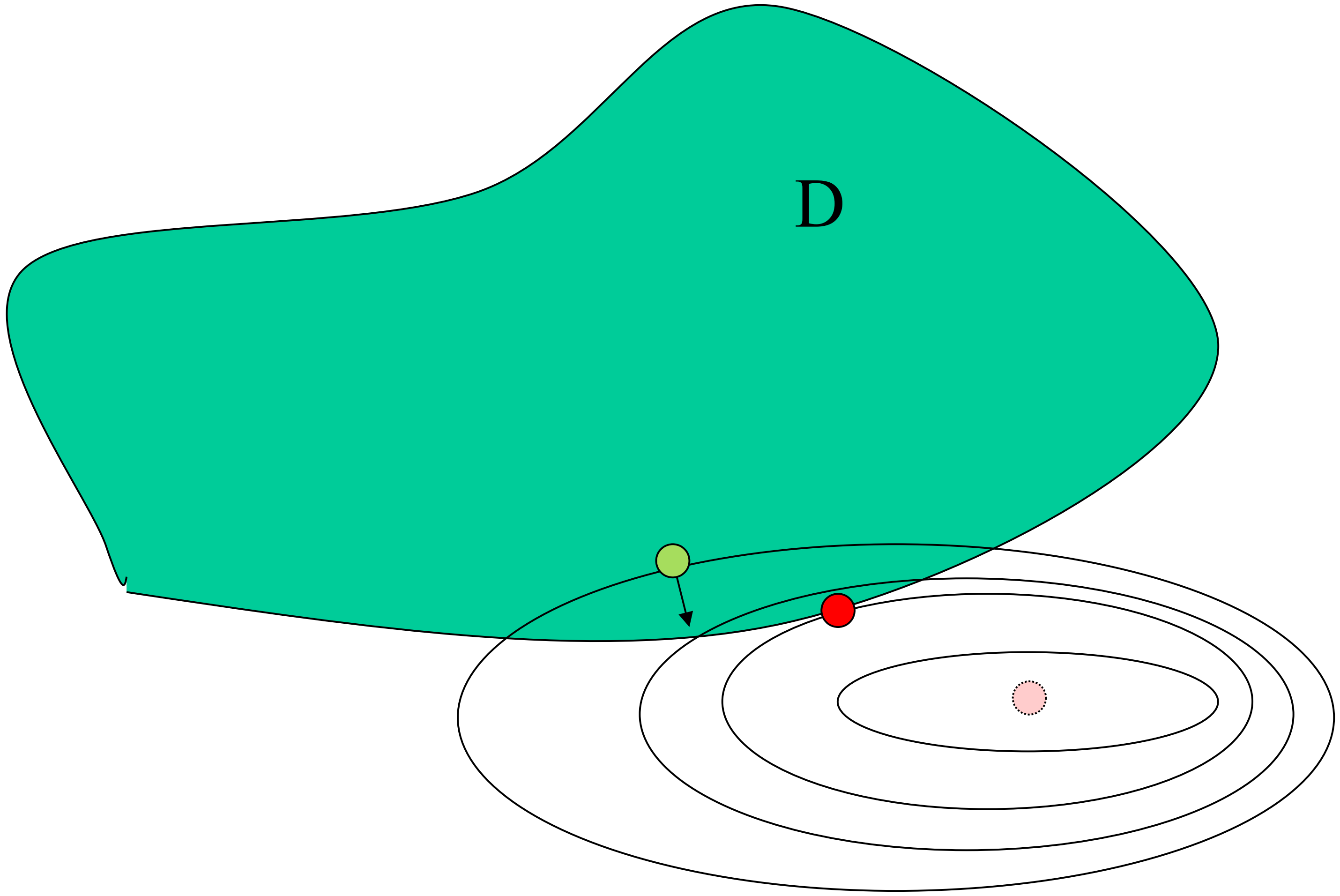


En búsqueda del mínimo.

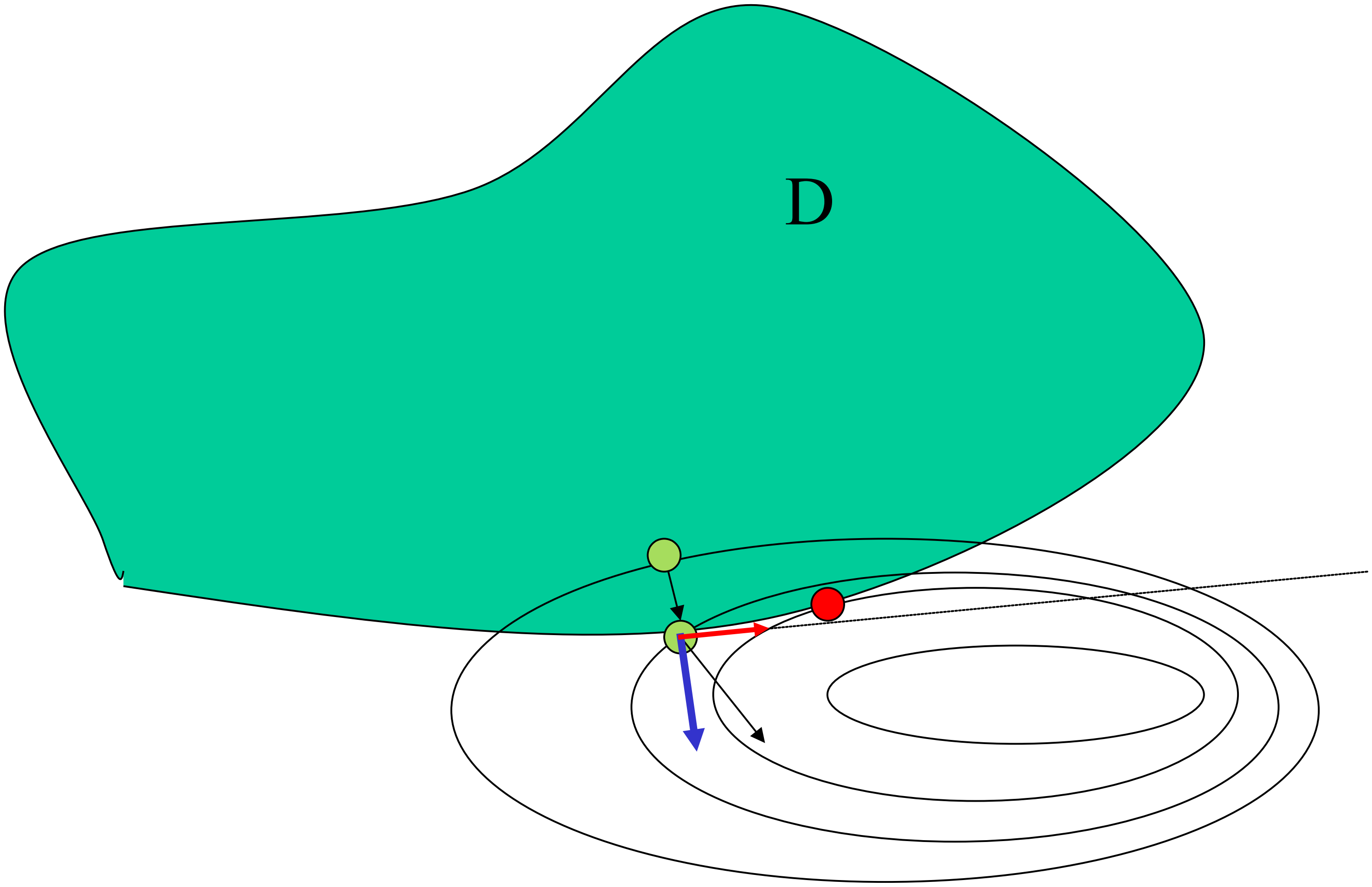
Ej. 2) Mínimo en la frontera del Dominio.



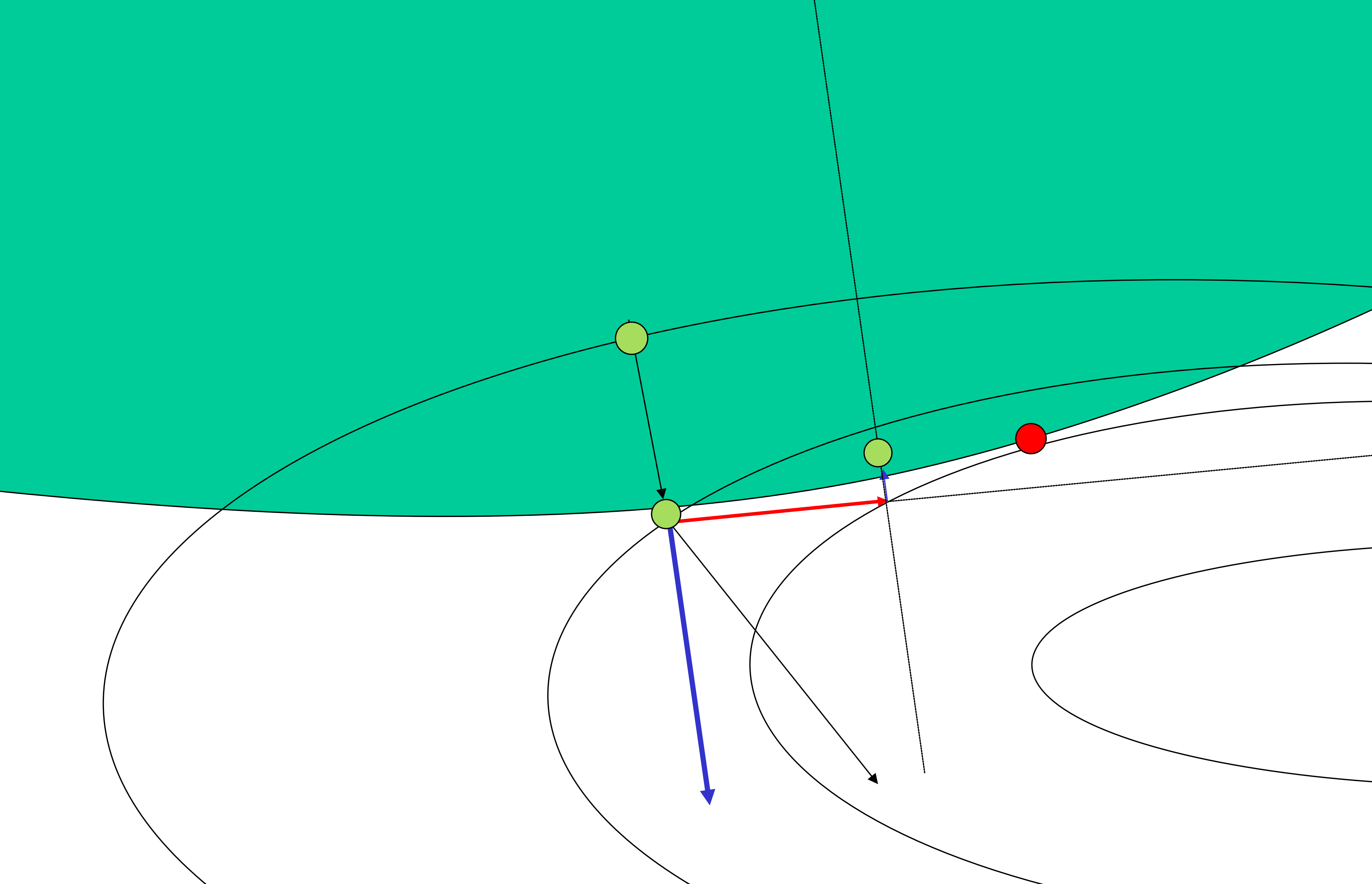
En búsqueda del mínimo en la frontera del dominio



En búsqueda del mínimo. Sobre la frontera del dominio



En búsqueda del mínimo en la frontera del dominio.



En búsqueda del mínimo.

$$X_0 \,;\, f\left(X_0\right)$$

Punto inicial en la frontera de D

$$\vec{n}_D$$

Normal a la frontera de D

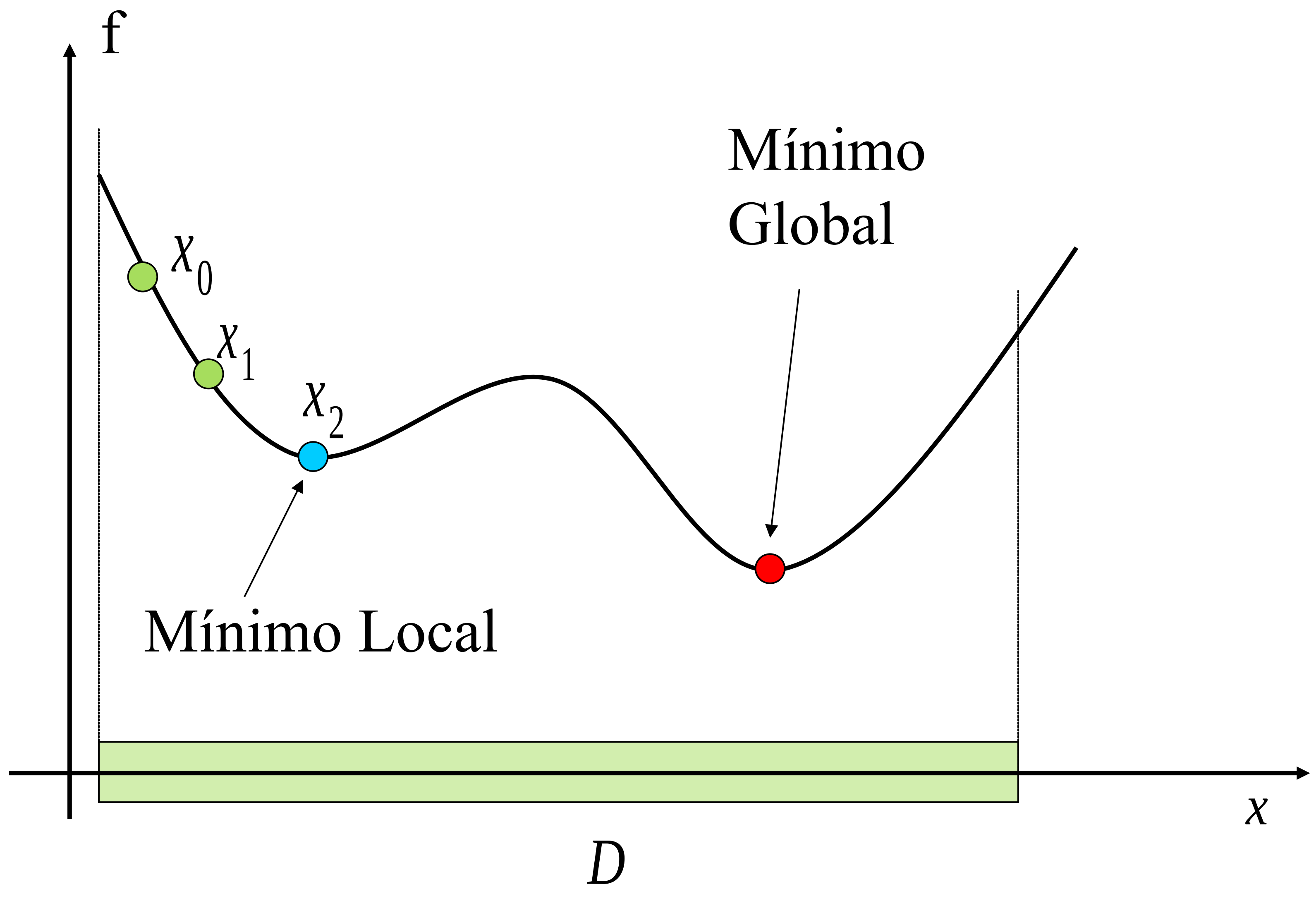
$$si \quad \vec{v}\cdot\vec{n}_D > 0\,;$$
$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v} - \left(\vec{v}\cdot\vec{n}_D\right)\vec{n}_D$$

Dirección de bajada en un entorno de X_0 paralela a la frontera de D.

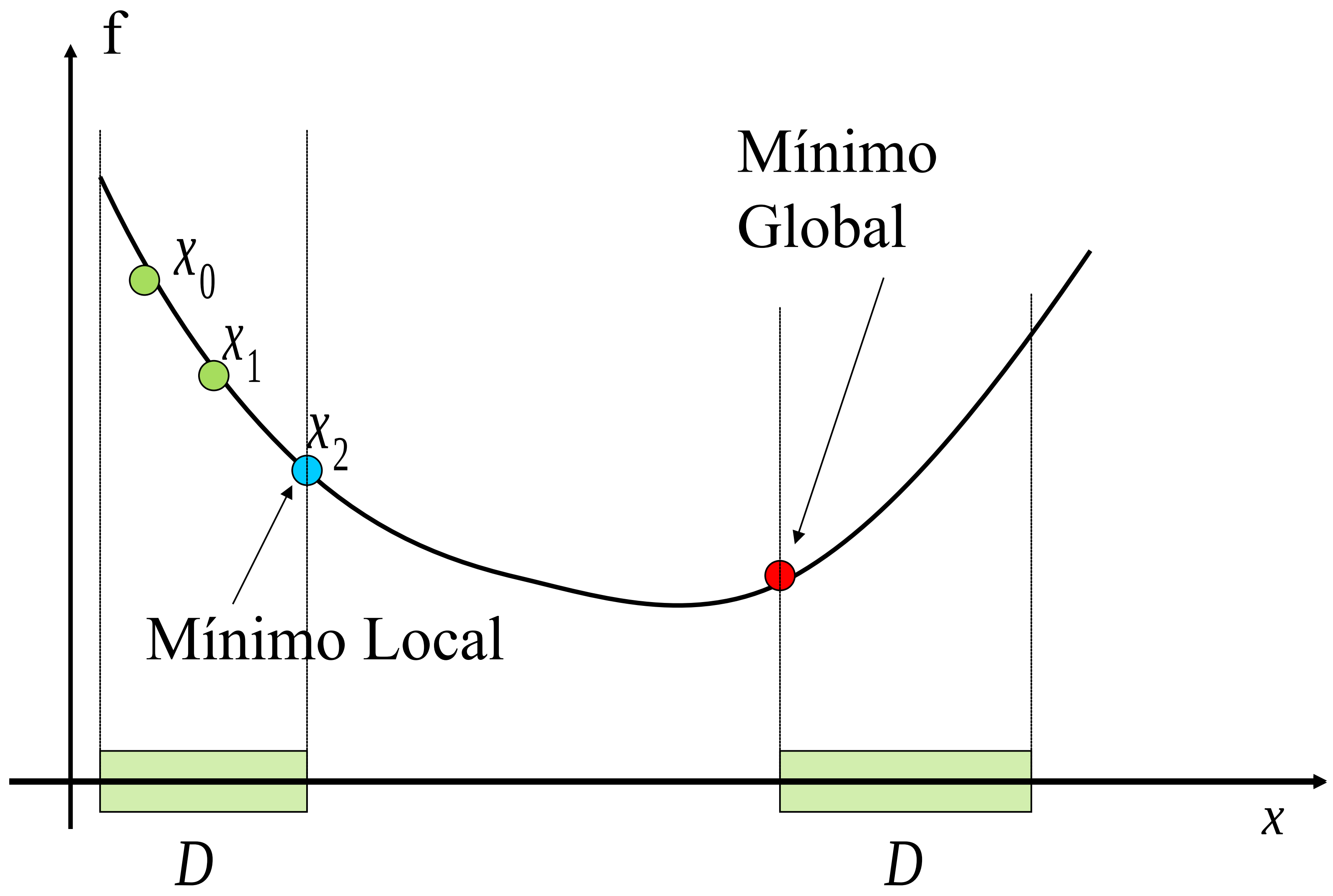
Solución LOCAL

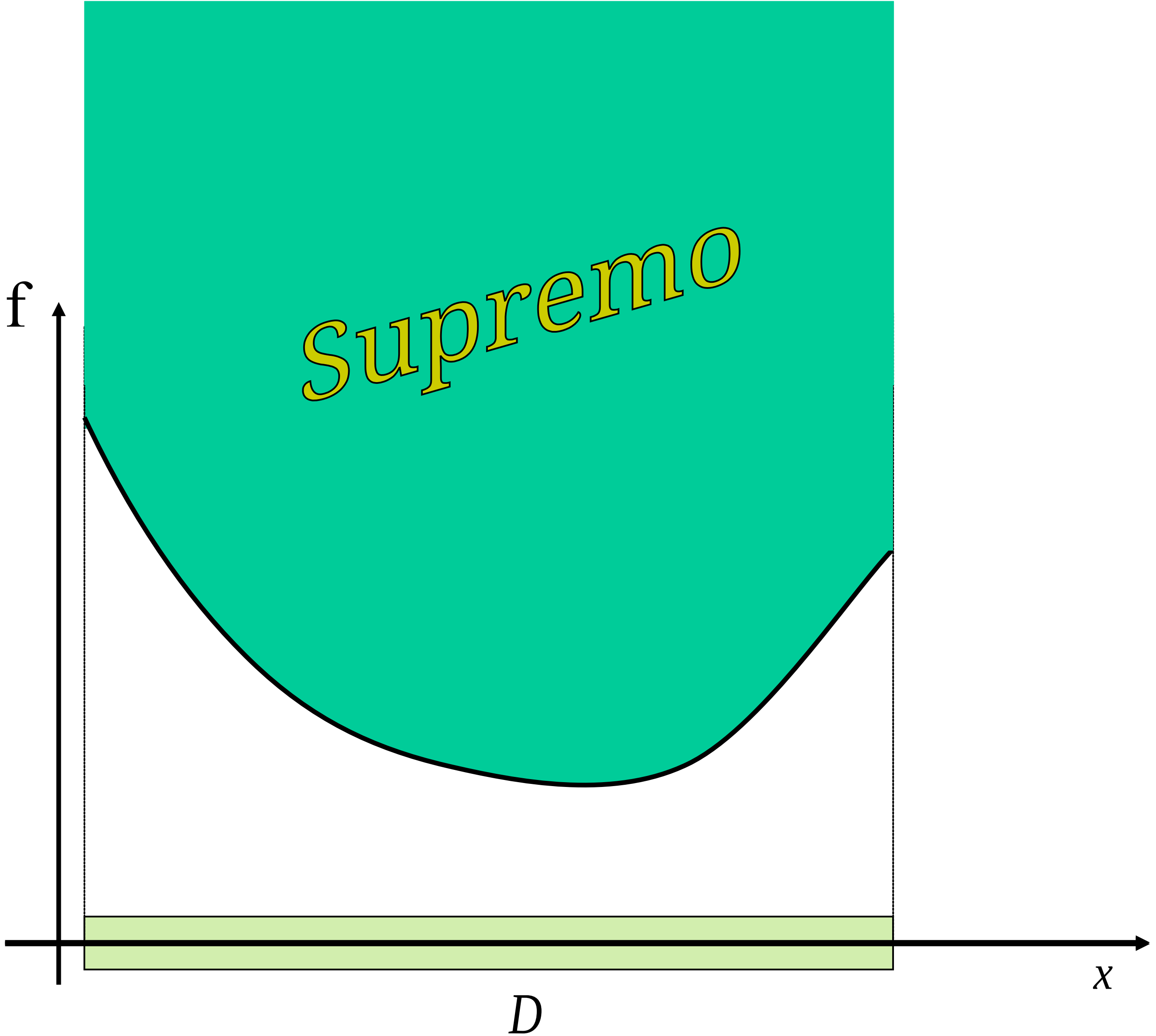
- La búsqueda la realizamos hasta que no logramos continuar bajando.
- Lo que obtenemos es un mínimo LOCAL.
- Puede ocurrir que EL MÍNIMO (global) no sea alcanzable desde el punto de partida.

Ejemplo (f con lomada)



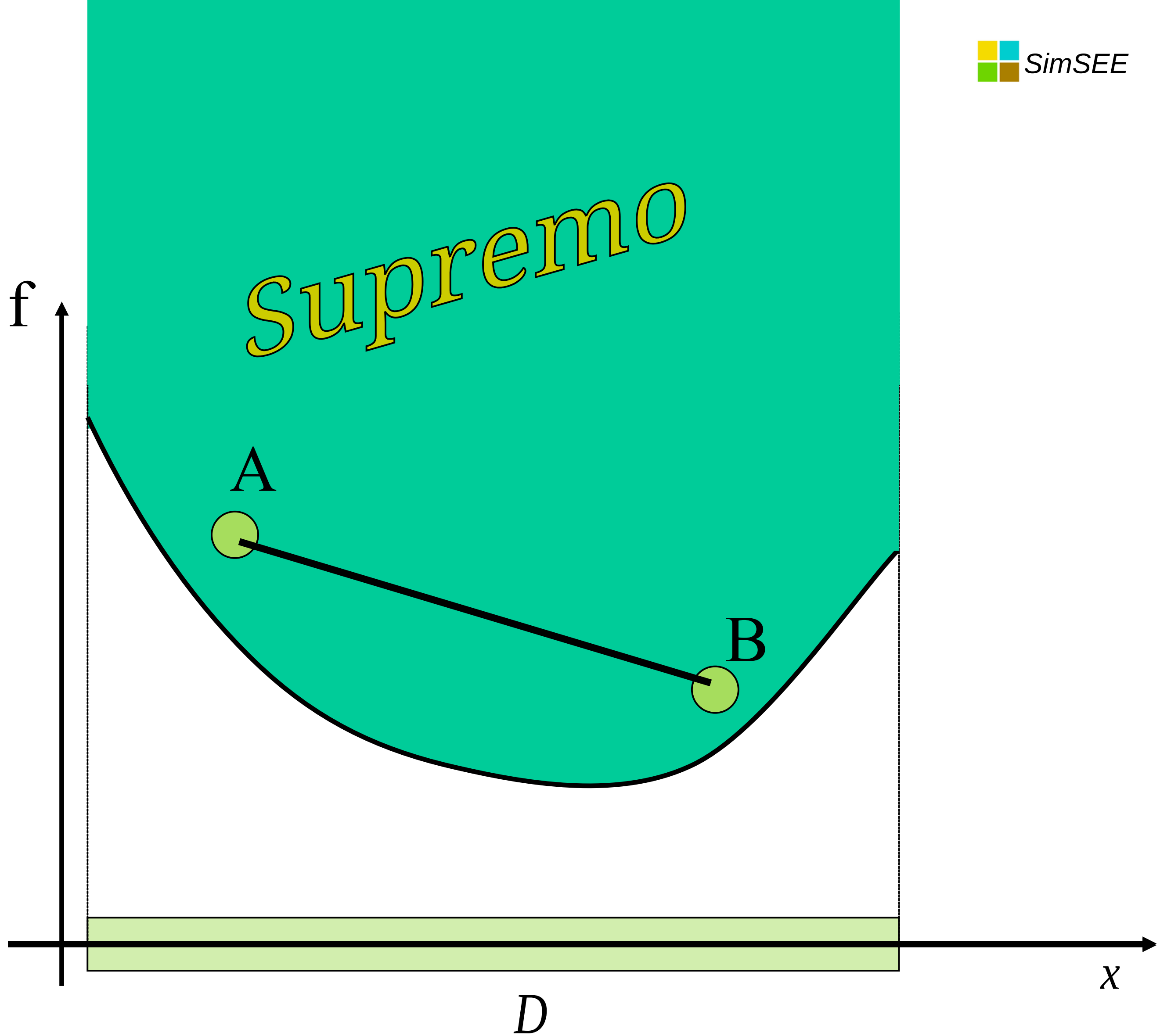
Ejemplo (D partido)





$$f_D = \left\{ (z, X) / z \in R; X \in D; z \geq f(X) \right\}$$

Problema CONVEXO

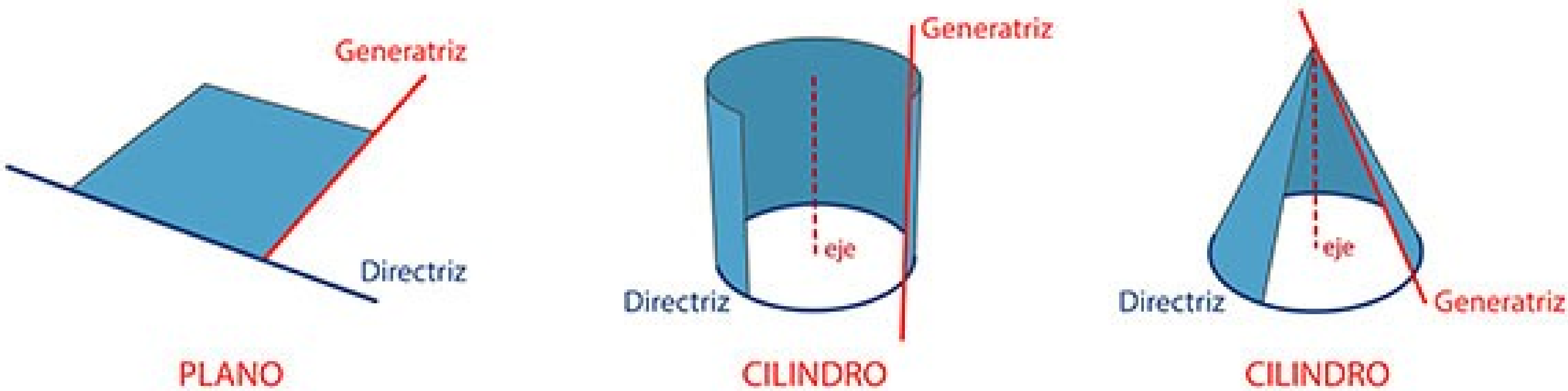


El problema es convexo si el SUPREMO de f sobre D es convexo.

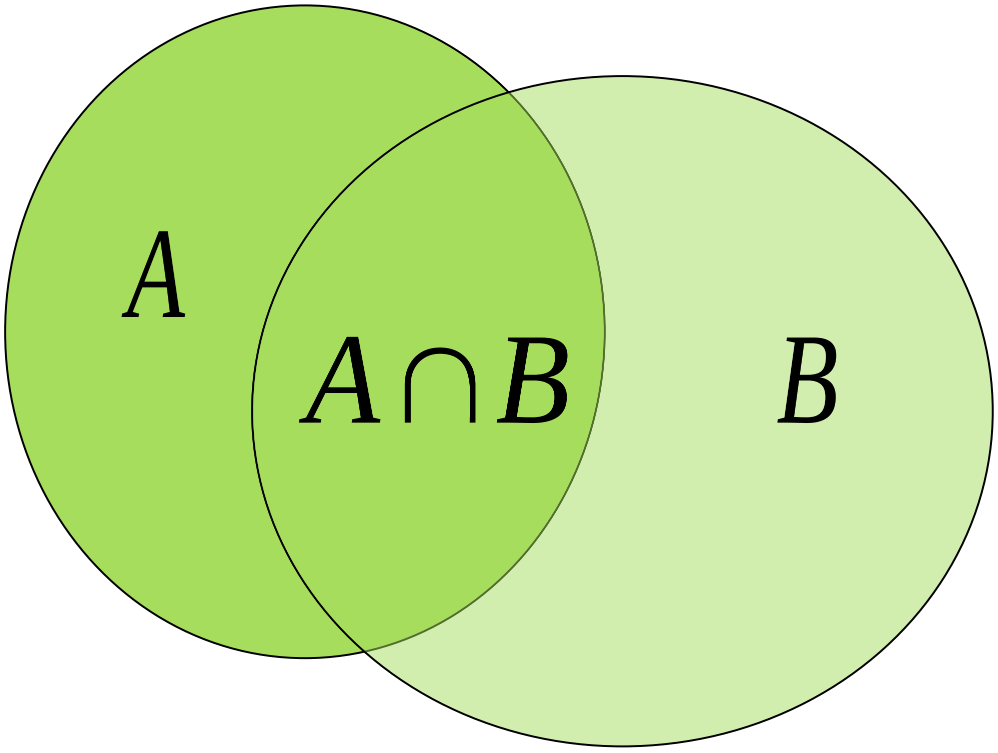
Local===GLOBAL

- Si el problema es convexo
- Un mínimo local es el mínimo GLOBAL
- Por eso, cuando un problema es convexo, nos quedamos tranquilos encontrando el mínimo por mecanismos de búsqueda en un entorno a partir de un punto inicial.

Los segmentos de rayos desde un Punto a todos los puntos de un convexo generan un convexo.



La intersección de CONVEXOS es un CONVEXO



Función de costo lineal.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=N} a_i x_i$$

Función de costo lineal. Derivada direccional.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=N} a_i x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i$$

SimSEE

Función de costo lineal. Derivada direccional.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(.) = a_i \neq 0$$

Función de costo lineal

$$f(x) = a^T \cdot x + f_0$$

$$\nabla f(x) = a \neq 0$$

Notación:

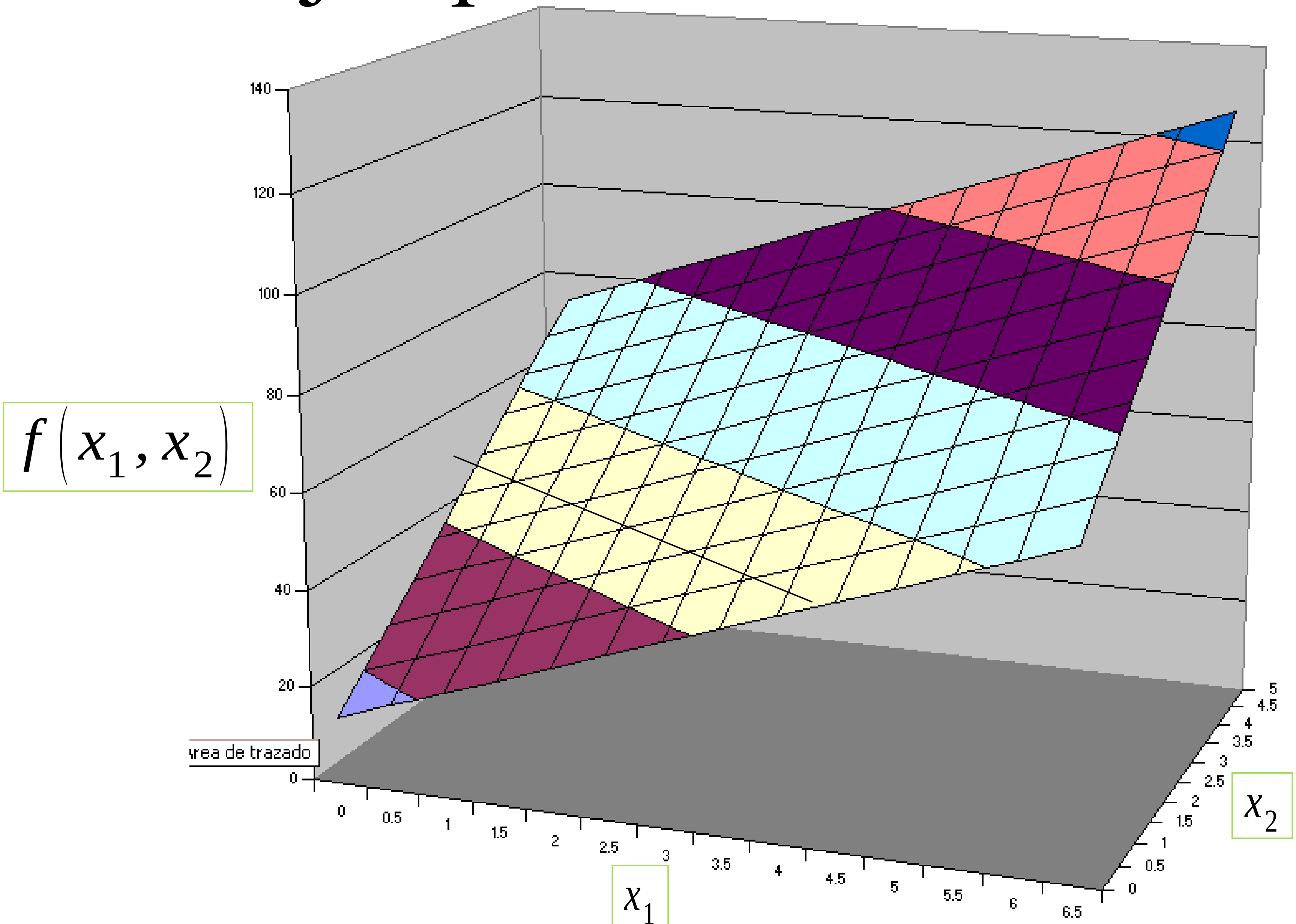
$$\nabla f(x) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$a \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$x \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

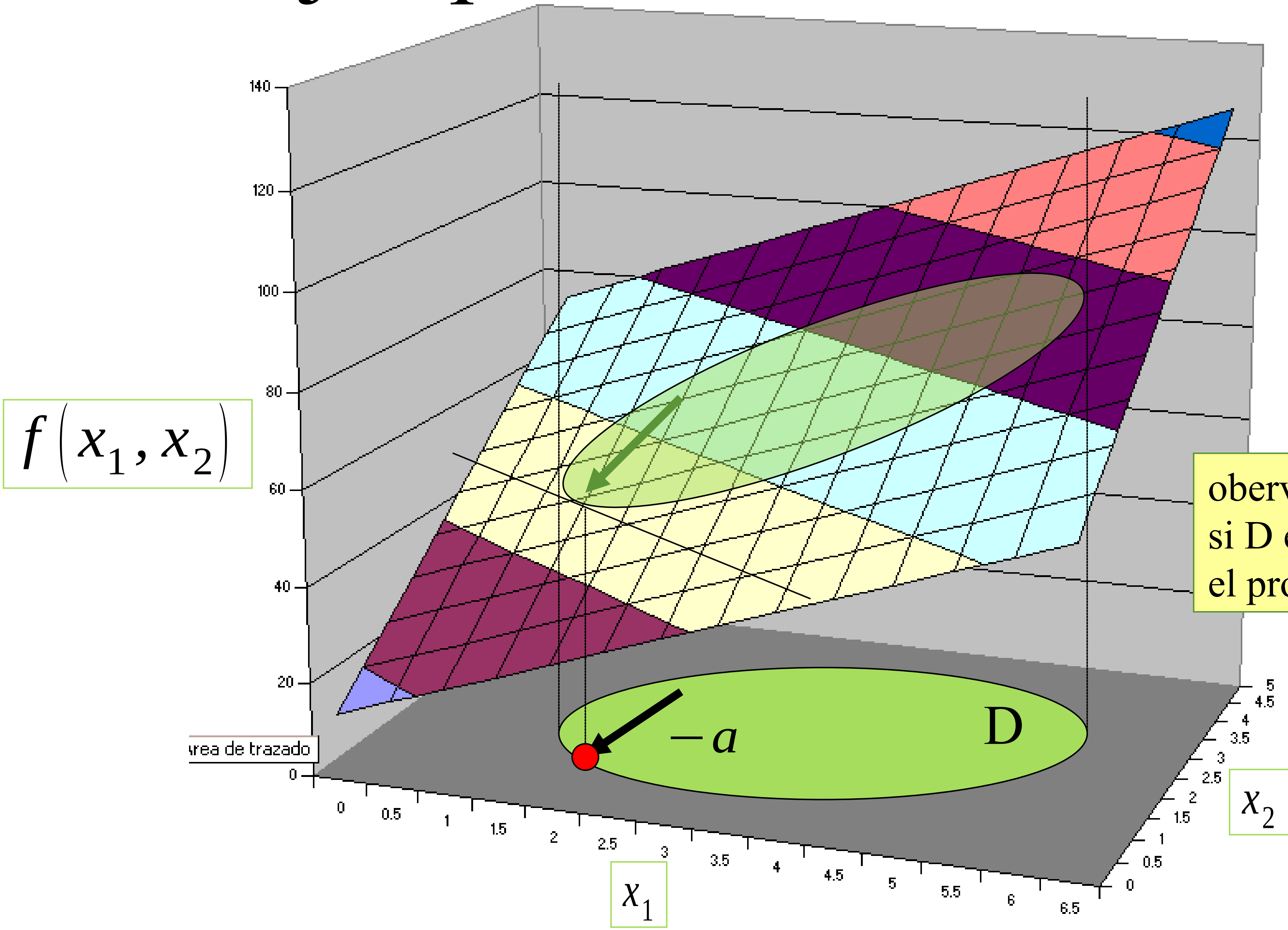
$$a^T \cdot x = \sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i$$

Ejemplo Función Lineal



observar que el Supremo de f en R2 es convexo.

Ejemplo Función Lineal

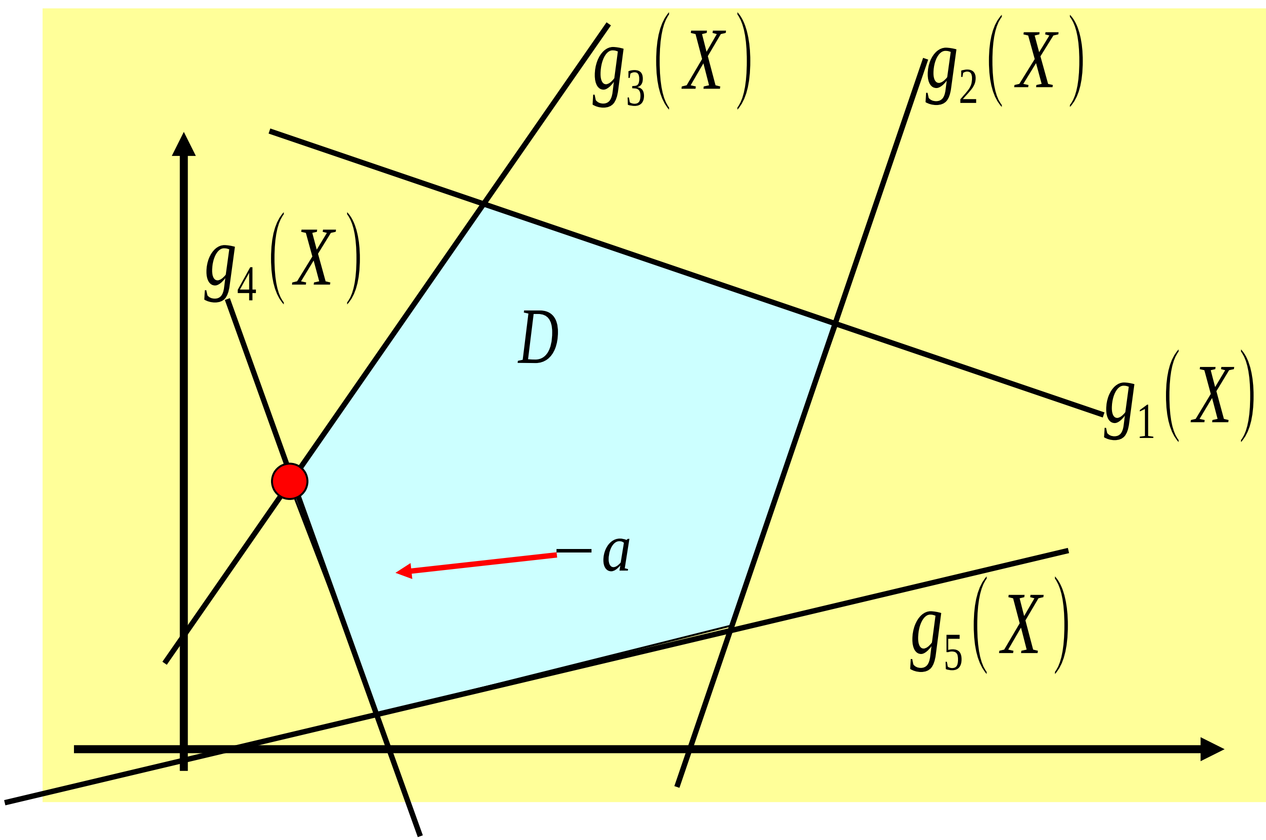


obervar que
si D es convexo
el problema lo es.

Problema Lineal

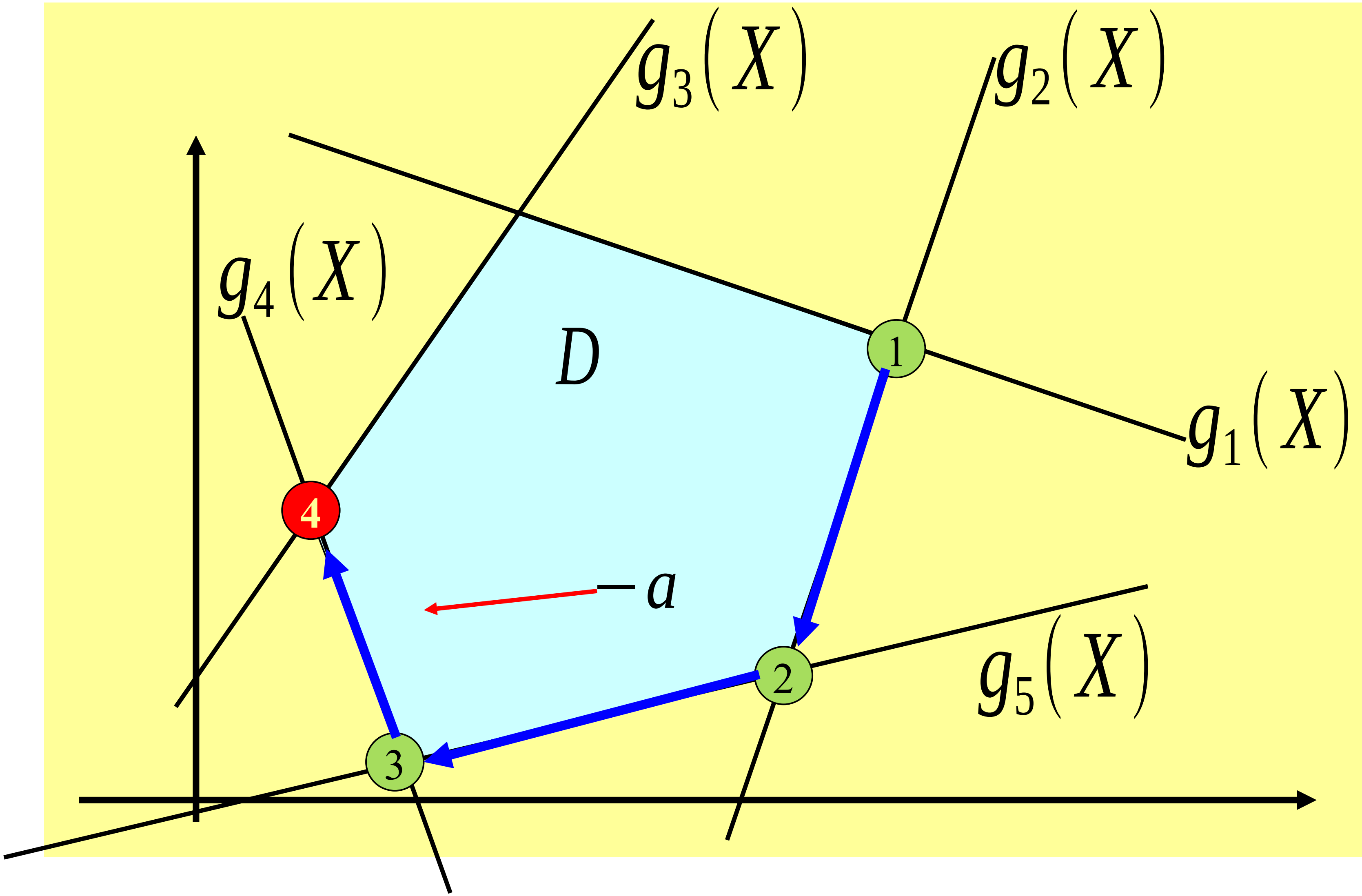
$$f(X) = a^T \cdot X + f_0$$

$$D = \bigcap_{i=1}^{i=Nr} \left\{ X / g_i(X) = a_i^T \cdot X + g_{i0} \leq 0 \right\}$$



observar que el problema lineal es convexo.

Método SIMPLEX



Relajación de un problema.

Relajación de un problema.

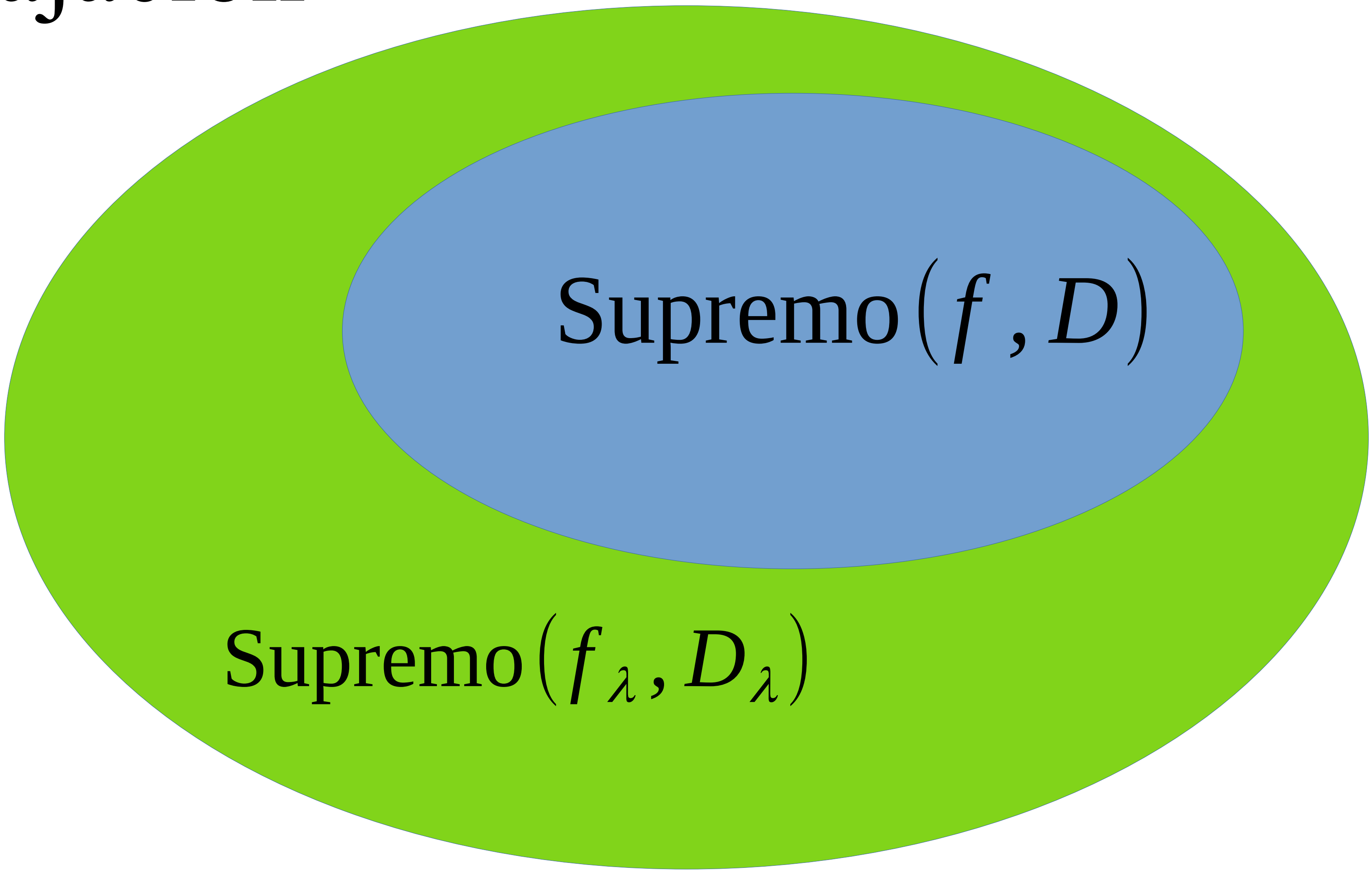
$$P_{\text{Original}}: \boxed{\min_{X \in D} f(X)}$$

$$\text{P}_{\lambda}: \boxed{\min_{X \in D_{\lambda}} f_{\lambda}(X)}$$

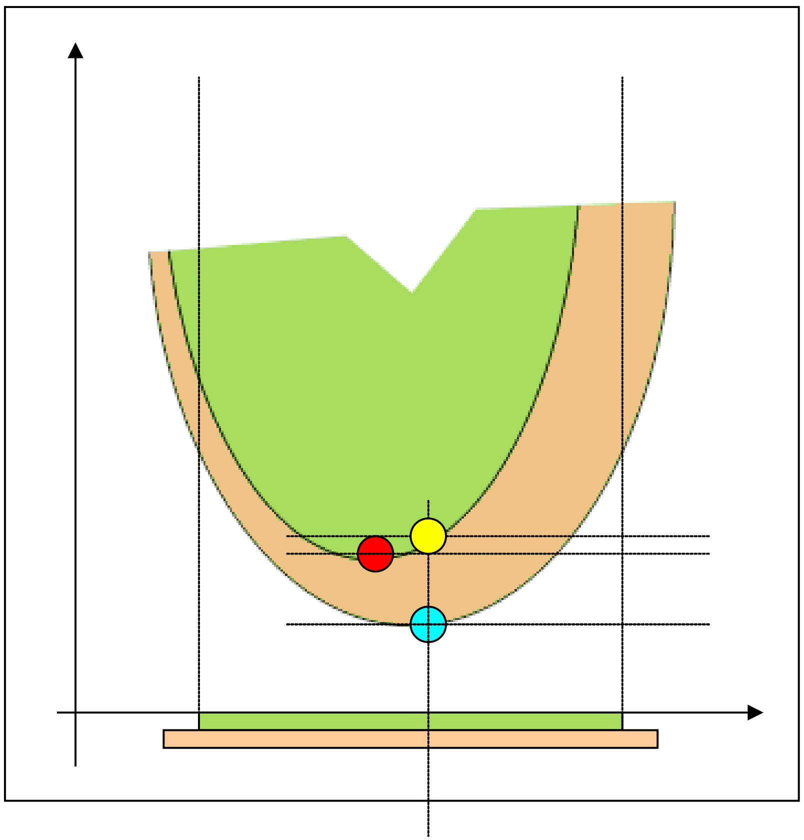
P_{λ} es una relajación de $\text{P}_{\text{original}}$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} D \subseteq D_{\lambda} \\ \text{y } f_{\lambda}(X) \leq f(X) \, \forall X \in D \end{cases}}$$

Relajación


$\text{Supremo}\left(f, D\right)$
$\text{Supremo}\left(f_\lambda, D_\lambda\right)$

Relajación



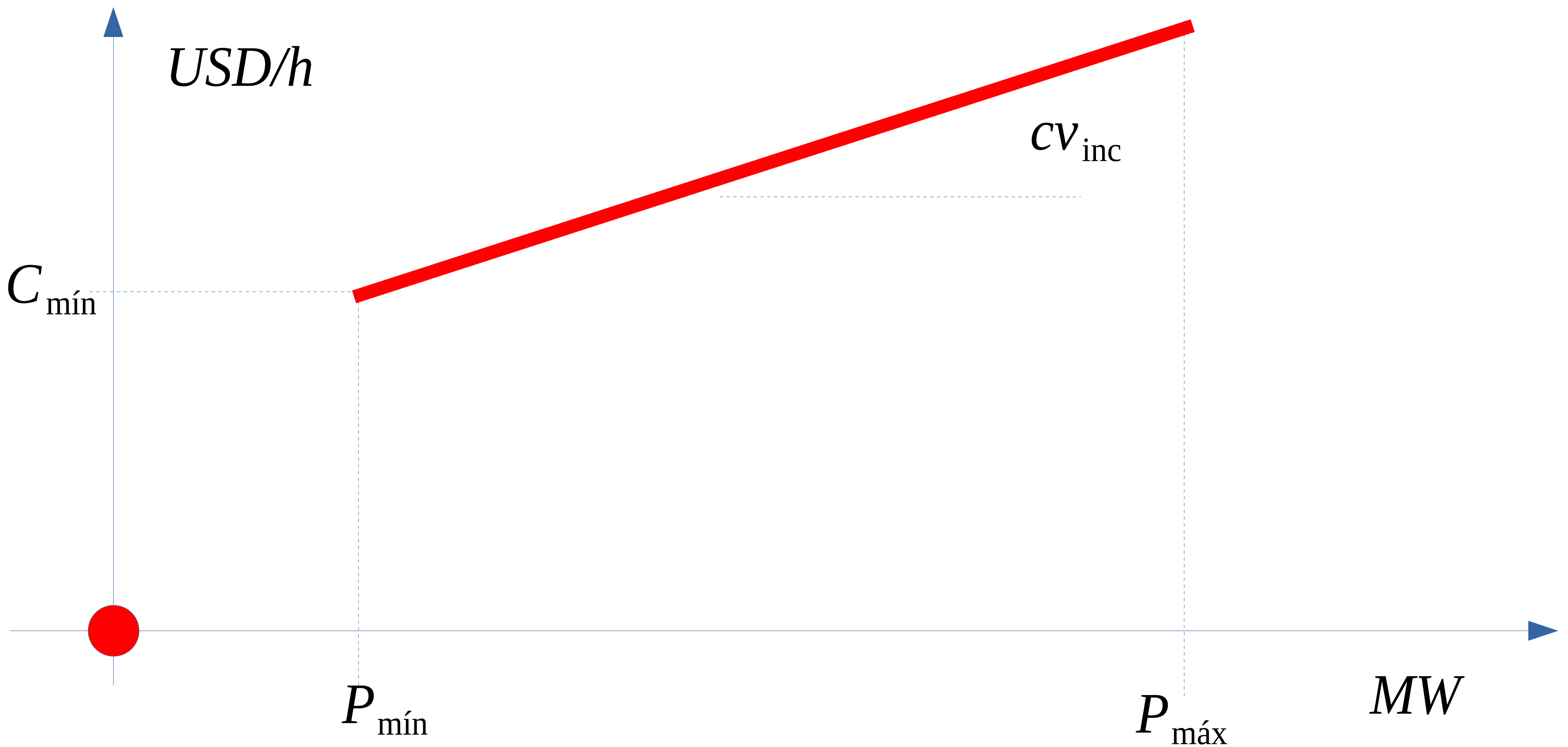
- La solución del problema relajado, es una cota inferior del la solución del problema original.
- El valor de la función de costo del problema original, en la x solución del problema relajado (si es factible) es una cota superior de la solución del problema original.

Programación Entera Mixta.
(*Mixed Integer Programming*)

$$\min_{x \in D} f\left(x\right)$$

$$D \subset R^{n_1} \times E^{n_2}$$

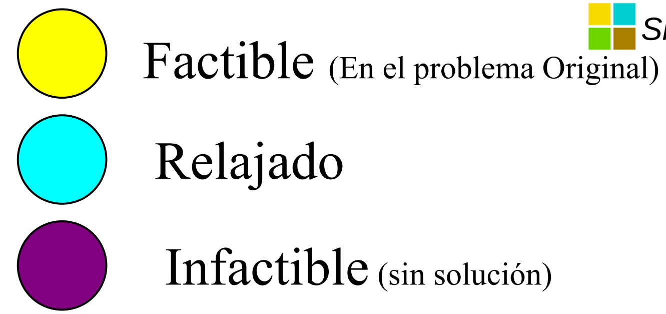
Modelo de Central Térmica con Mínimo Técnico

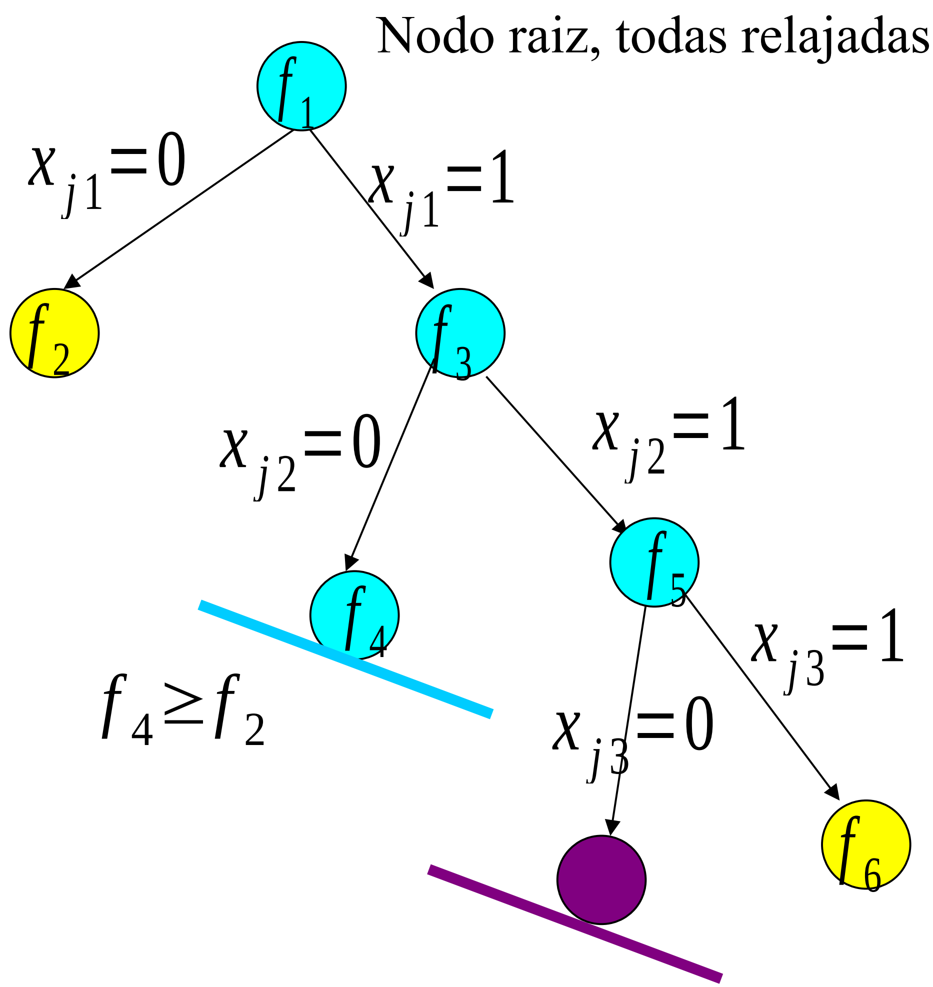


SimSEE

Árbol de problemas

- Dejamos variar libremente las variables en sus intervalos [0,1] y resolvemos y vamos des-relajando de a una las variables.
- Al des-relajar creamos dos problemas más “ajustados”, pero que en conjunto, siguen siendo relajación del original mientras queden variables libres.





Esta es la técnica usada en SimSEE para la resolucion del despacho de centrales con mínimos técnicos.