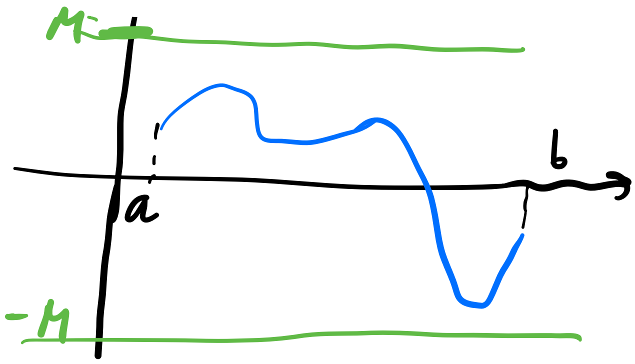
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada si

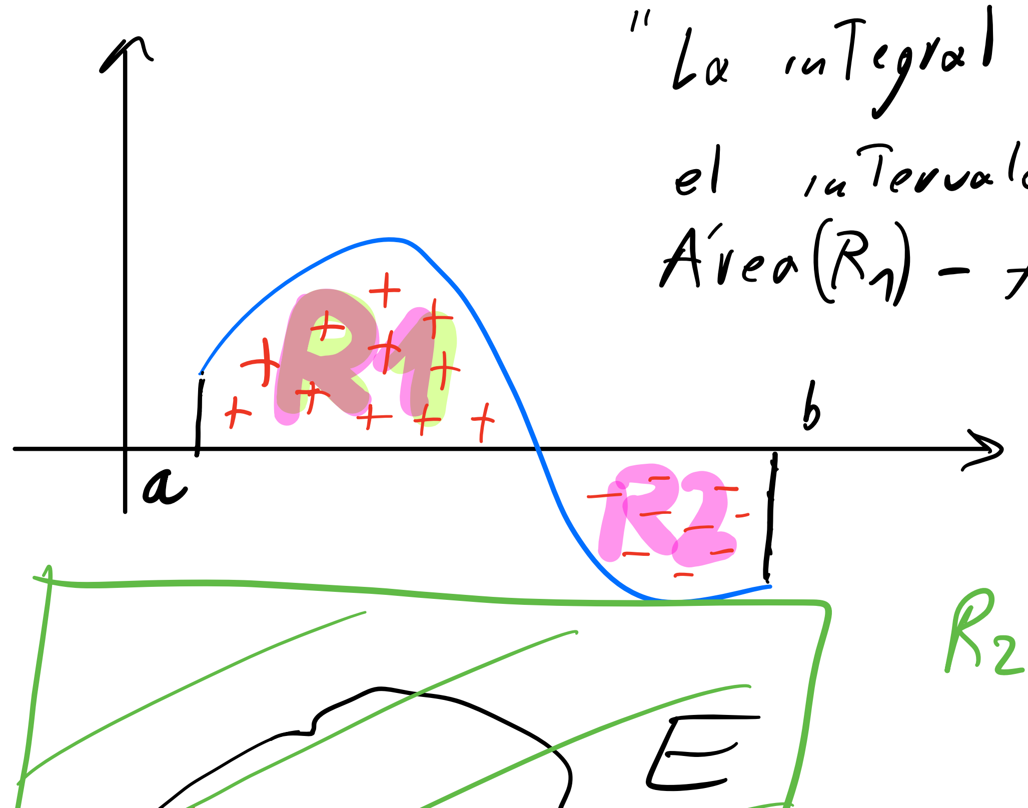
$Im(f) = \{ f(x) : x \in [a,b] \}$ es un conjunto acotado

O, lo que es lo mismo:

si $\exists\, M > 0 \;/\; -M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$



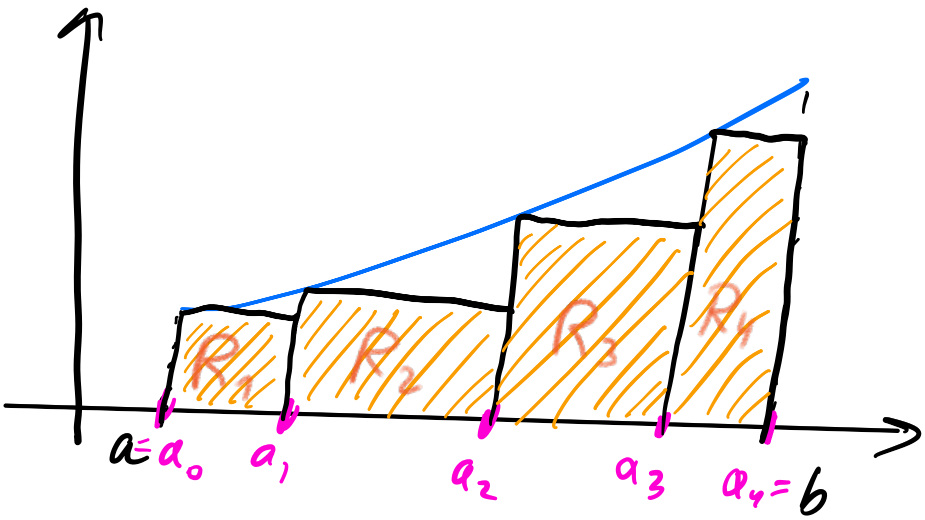
"La integral de f en el intervalo $[a,b]$ es $\text{Área}(R_1) - \text{Área}(R_2)$"



$$\text{Área}(R_1) < \text{Área}(E) < \text{Área}(R_2)$$

R_1 aproximación inferior o por defecto

R_2 aproximación superior o por exceso



$P = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$

El area bajo el gráfico es mayor que

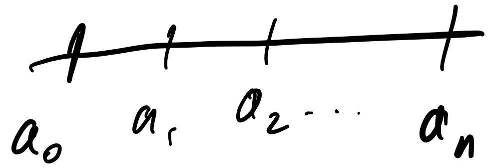
$\text{Área}(R_1) + \text{Área}(R_2) + \text{Área}(R_3) + \text{Área}(R_4)$

$S_*(f, P) = (a_1 - a_0) \inf(f, [a_0, a_1]) +$

$$\cdots\cdots + (a_4 - a_3)\inf(f,[a_3,a_4])$$

$$= \sum_{i=0}^{3}(a_{i+1}-a_i)\inf(f,[a_i,a_{i+1}])$$

$$P = \{\underset{\substack{\shortparallel \\ a}}{a_0}, a_1, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ b}}{a_n}\}$$

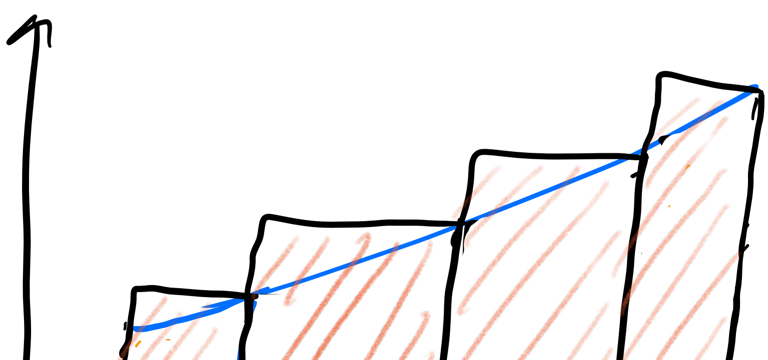


$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\inf(f,[a_i,a_{i+1}])$$

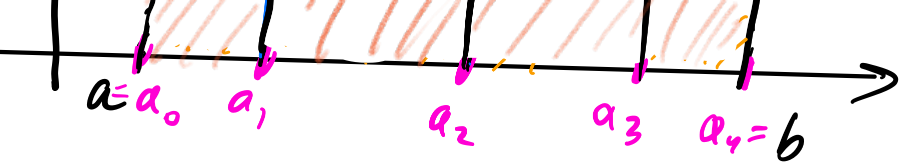
suma inferior

suma superior

$$S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\sup(f,[a_i,a_{i+1}])$$



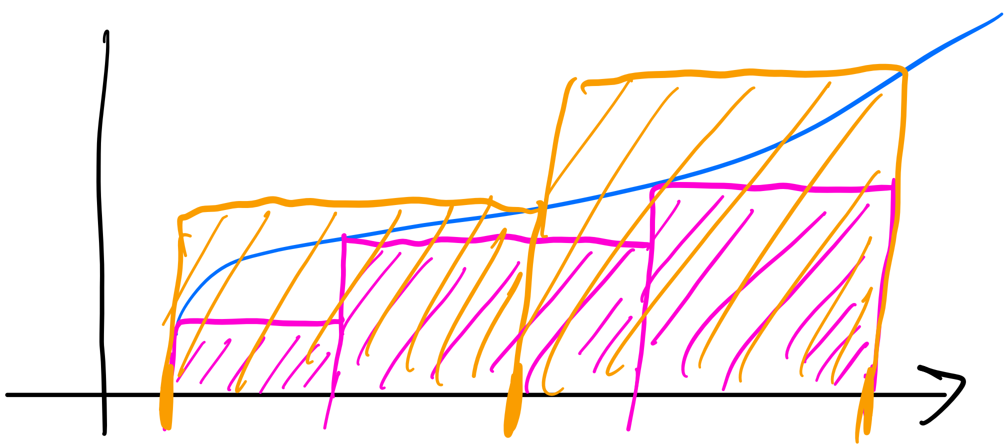
$$P = \{\underset{\substack{\shortparallel \\ a}}{a_0}, a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

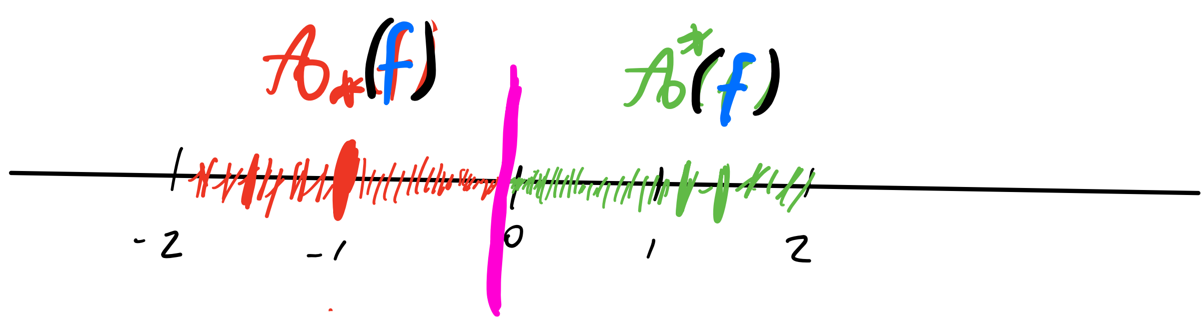


Prop: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, P, Q particiones de $[a,b]$ entonces:

$$S_*(f, P) \leq S^*(f, Q)$$

"Toda suma inferior es menor o igual que toda suma superior"





$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada

$$\mathcal{A}_*(f)=\{S_*(f,P): P \text{ partición de } [a,b]\}$$

aproximaciones inferiores

$$\mathcal{A}^*(f)=\{S^*(f,P): P \text{ partición de } [a,b]\}$$

Como vimos antes

$$S_*(f,P)\leq S^*(f,Q)$$

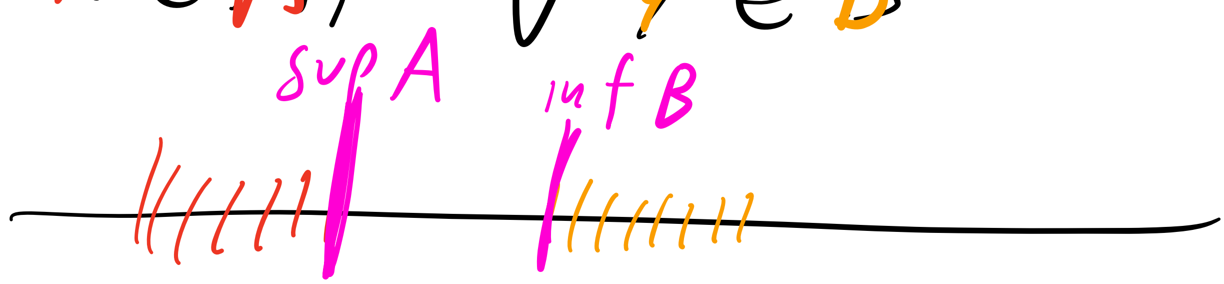
$$\forall\ P, Q \text{ particiones de } [a,b]$$

Otra forma de decir lo de arriba:

Entonces $x \leq y$

* $\forall x \in \mathcal{A}_*(f) \; \forall y \in \mathcal{A}^*(f)$

Lema: Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos. Supongamos que $x \leq y$ $\forall x \in A, \; \forall y \in B$



entonces $\sup A \leq \inf B$

Por $\mathcal{H}$ y el Lema tenemos que

$$\underbrace{\sup \mathcal{B}_*(f)}_{} \leq \inf \mathcal{B}^*(f)$$

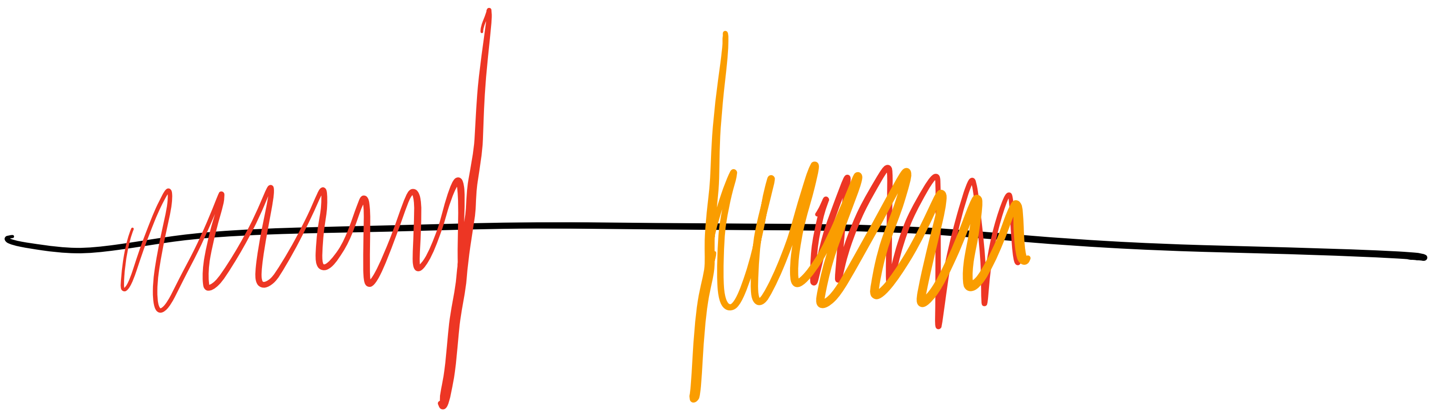
$\underbrace{\text{Integral inferior de } f}_{}$

se anota $I_*(f)$

$\inf \mathcal{B}^*(f) \Leftarrow$ Integral superior de f y

Se anota

$I^*(f)$

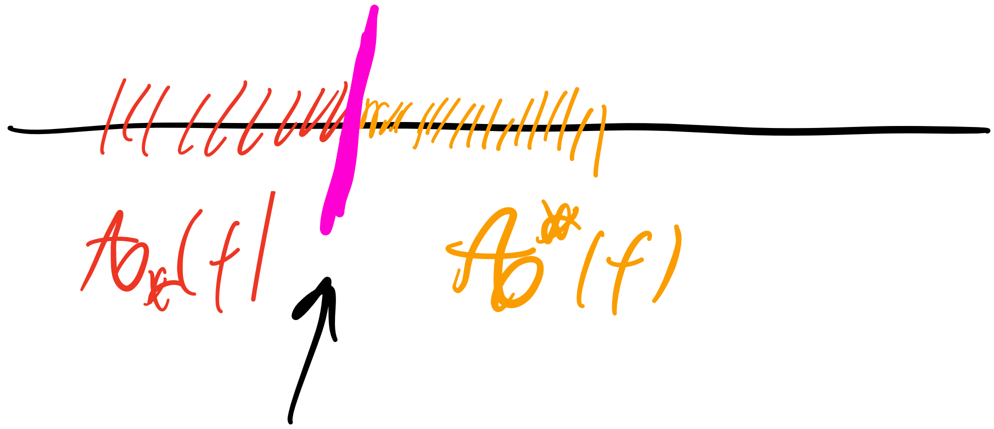


$I_*(f) \le I^*(f)$

Def: Decimos que f es integrable si

$$I_*(f) = I^*(f)$$

Es decir cuando el dibujo de las aproximaciones es



$$I_*(f) = I^*(f)$$

En el caso en que f es integrable, definimos la integral de f en el intervalo $[a,b]$ como

$$I_*(f) = I^*(f)$$

A la integral la anotamos

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

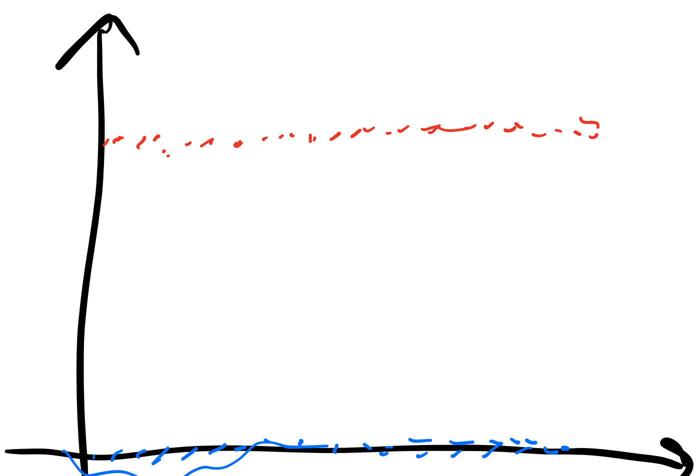
<u>Spoiler:</u> Toda función continua definida en un

intervalo cerrado
es integrable

La clase que viene
veremos que:

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida
como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



no es integrable.