Propiedad fundamental del supremo

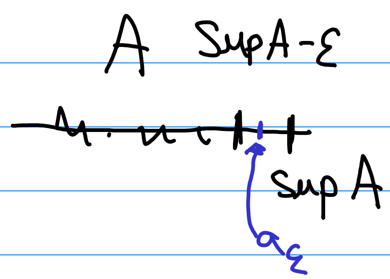
A un conjunto acotado superiormente

El supremo de A es el único número de $x \in \mathbb{R}$ que satisface:

1) para todo $a \in A$, $a \leq x$

2) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que

$$x - \varepsilon < a_\varepsilon \leq x.$$



2.3.1 a) $A = [-1, 1]$ $\quad \sup A = 1 = \max A$

$\inf A = -1 = \min A$

b) $(2, 5)$ $\quad \sup A = 5$, no hay máximo

$5 \notin A$

$\inf A = 2$, no tiene mínimo

g) $A = [-1, 1] \cap (0, 2) = (0, 1]$ $\quad \sup A = 1 = \max A$

$\inf A = 0$, no min

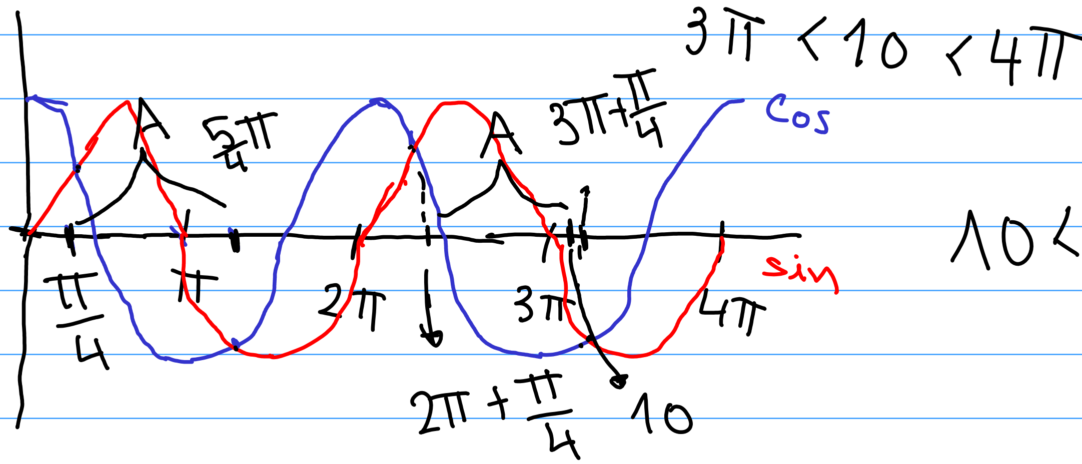
2. a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \cos(\frac{n\pi}{2}), n \in \mathbb{N}\} =$

$= \{\cos(0 \cdot \frac{\pi}{2}), \cos(1 \cdot \frac{\pi}{2}), \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}), \cos(3 \cdot \frac{\pi}{2})$

$$\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\left(5\cdot\frac{\pi}{2}\right),\dots\} = \{-1,0,1\}$$

$$\sup A = 1 = \max A$$
$$\inf A = -1 = \min A$$

c) $A = \{\theta \in [0,10] : \cos(\theta) < \sin(\theta)\}$



$$10 < 3\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(2\pi+\frac{\pi}{4}, 10\right]$$

$$\sup A = \max A = 10$$
$$\inf A = \frac{\pi}{4} \quad \text{no min}$$

i) $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ $\qquad \sup A = 1$, no max

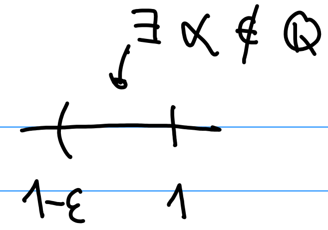
$0 \notin A$ $\qquad \inf A = 0$, no min

$1 \notin A$ $\qquad C^{[0,1]}$

Afirmación : para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tal que $\alpha \in (1-\varepsilon, 1]$

$\Rightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $1-\varepsilon < a_\varepsilon \leq 1$

$\Rightarrow \sup A = 1$



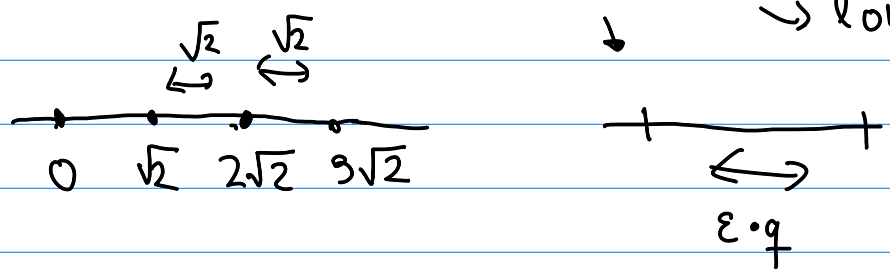
Prueba de la afirmación

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ Fijo $\varepsilon > 0$.

Idea: Capaz $\frac{p}{q}\sqrt{2} \in (1-\varepsilon, 1]$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$

$$\Updownarrow$$

$$p \cdot \sqrt{2} \in ((1-\varepsilon)\cdot q, q] \rightsquigarrow \text{longitud } \varepsilon \cdot q.$$



Tomo q tal que $\varepsilon \cdot q > 2\sqrt{2} > \sqrt{2}$.

$((1-\varepsilon)\cdot q, q]$ tiene longitud mayor que $\sqrt{2}$

Tiene que existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \cdot \sqrt{2} \in ((1-\varepsilon) q, q]$

$\square$

3. $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos

$A \subset B$, B acotado

$\sup A \leq \sup B \iff \sup B$ es una cota superior de A

$A \subset B$, $\forall b \in B$, $b \leq \sup B$ $\quad \exists$ por el axioma

$\Rightarrow \forall a \in A$, $a \leq \sup B \Rightarrow a$ es acotado superiormente y $\sup A \leq \sup B$

$\underline{\inf B \leq \inf A}$

$A \subset B,\ \forall\, b \in B,\ b \geq \inf B \Rightarrow \forall a \in A,\ a \geq \inf B$

$\Rightarrow A$ es acotado inferiormente y $\inf A \geq \inf B$

$\underline{\inf A \leq \sup A}$ $\quad A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x \in A \Rightarrow$

$$\inf A \leq x \leq \sup A \Rightarrow \inf A \leq \sup A$$

2) ejemplo $A \subset B$, B acotado

$$\inf B = \inf A < \sup A < \sup B.$$

$A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $A \subset B$ ✓

$\inf A = \inf B = 1 \qquad \sup A = 2 \qquad \sup B = 3$

2.4.2. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad [a,b]$

$\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$
$\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ acotados

$$\sup\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \leq \underbrace{\sup\{f(x) : x \in [a,b]\}}_{K_1} + \underbrace{\sup\{g(x) : x \in [a,b]\}}_{K_2}$$

Tesis $\overset{\text{Dem}}{\Longleftrightarrow}$ $\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\}$ está acotado superiormente por $K_1 + K_2$

Prueba /

Considero $x \in [a,b]$, quiero probar

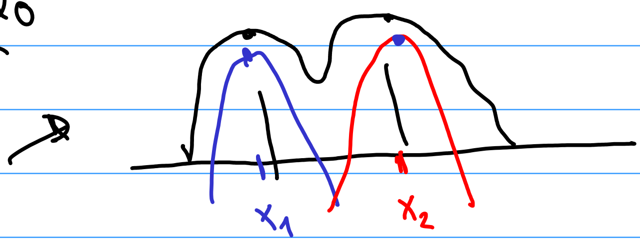
$$(f+g)(x) \leq k_1 + k_2$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Sabemos que $f(x) \leq k_1$ y $g(x) \leq k_2$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) \leq k_1 + k_2 \qquad \square$$

Ejemplo



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x \in [1,2] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & x \in [1,2] \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = 1$$

$$\sup(f+g) = 1 < \sup(f) + \sup(g) = 2$$