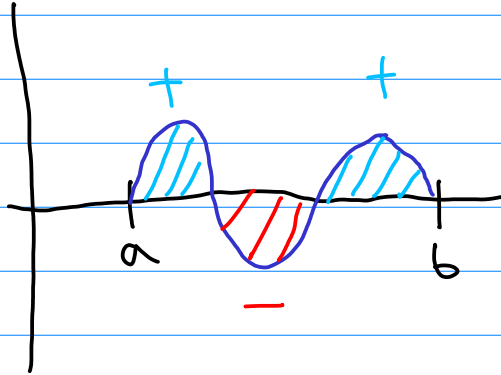


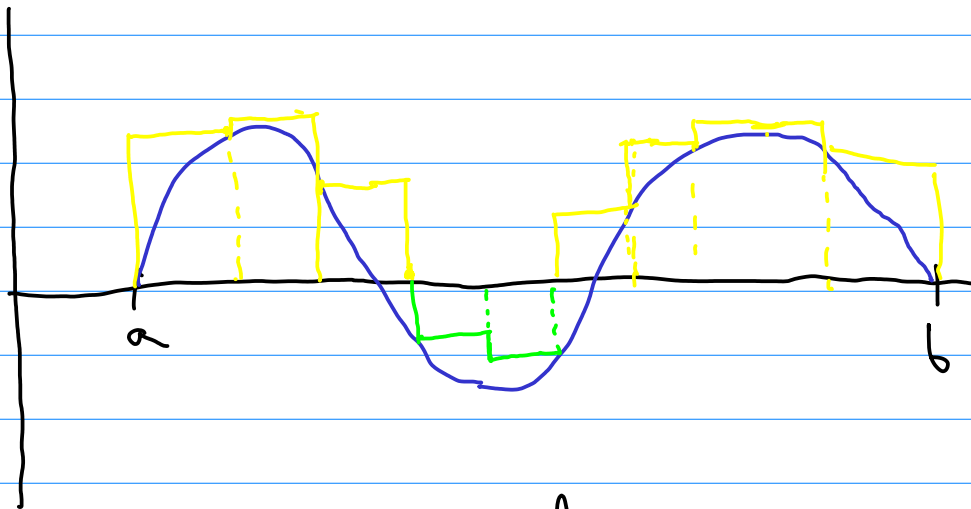
Área algebraica y aproximación

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

área algebraica =
área celeste - área roja



Aproximar el área algebraica por rectángulos



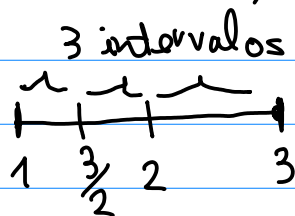
aproximación de área algebraica por exceso
= área rectángulos amarillos - área rectángulos verdes
 $\geq$ área algebraica

Def Una partición de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito P de la forma

$$P = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$$

$$\text{con } a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

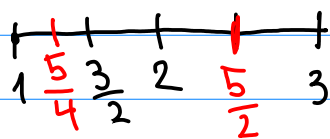
Ejemplos 1) $[1, 3]$, $P = \{1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$



Def Sean P, Q dos particiones del mismo intervalo $[a, b]$. Decimos que Q es más fina que P si $P \subset Q$.

Ejemplo 1) $[1, 3]$, $P = \{1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$

$$Q = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$$



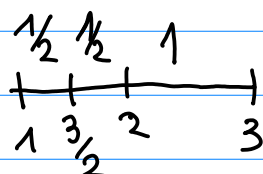
de $[a, b]$

2) Si P_1 y P_2 son particiones, entonces $P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$ más fina que P_1 y más fina que P_2 .

Def Dada una partición $P = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ de $[a, b]$, defino la norma de P como

$$\|P\| = \max \{a_{i+1} - a_i : 0 \leq i \leq n-1\}$$

Ejemplo 1) $[1, 3]$, $P = \{1, \frac{3}{2}, 2, 3\}$ $\|P\| = 1$



$$2) Q = \left\{ 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3 \right\}, \quad \|Q\| = \frac{1}{2}$$

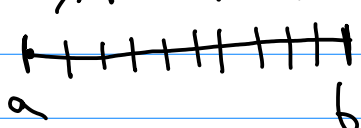
"norma chica $\Rightarrow$ todos los intervalos de la partición son chicos"

3) Si Q es más fina que P , $\|Q\| \leq \|P\|$.

Partición equiespaciada de $[a, b]$

La partición equiespaciada P_n de $n \in \mathbb{N}$ elementos es la partición $P_n = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ donde

$$a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

n subintervalos del mismo tamaño

 Cada intervalo tiene tamaño $\frac{b-a}{n}$
 Comprobar $\left\{ \begin{array}{l} a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n} \\ a_0 = a, a_n = b \end{array} \right.$

$$* \|P_n\| = \frac{b-a}{n}$$

* P_{2n} más fina que P_n

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b]$$

$$m \leq f(x) \leq M$$



Suma superior e inferior $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 acotada

Notación

$$\inf(f, [a, b]) = \inf \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$\sup(f, [a, b]) = \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

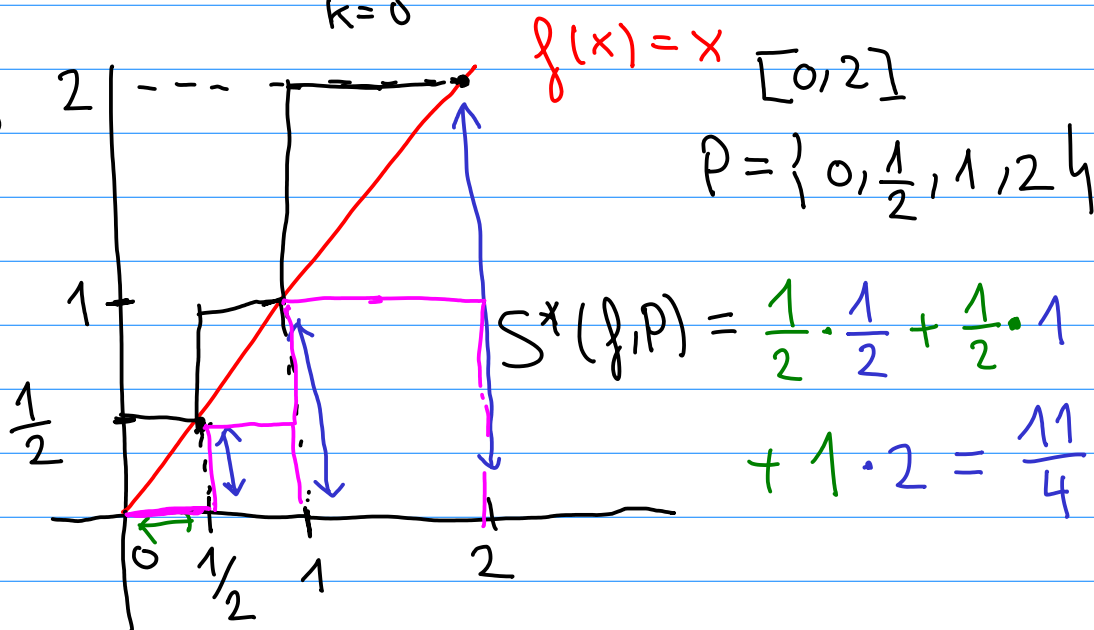
Def $P = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ de $[a, b]$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada
Suma superior

$$S^*(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \sup(f, [a_k, a_{k+1}])$$

Suma inferior

$$S_*(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf(f, [a_k, a_{k+1}])$$

Ejemplo



$$\rightarrow S_*(f, P) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} \leq 2 \leq \frac{11}{4}$$

$S_*(f, P)$ " $S^*(f, P)$
 área algebraica
 bajo la
 función f

P, Q particiones de $[a, b]$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Propiedades 1)

$$m(b-a) \leq S_*(f, P) \leq S^*(f, P) \leq M(b-a)$$

2) Si Q es más fina que P , entonces

$$S_*(f, P) \leq S_*(f, Q) \leq S^*(f, Q) \leq S^*(f, P)$$

$$3) S_*(f, P) \leq S^*(f, Q)$$

Prueba 1) $P = \{a_0, \dots, a_n\}$

$$S^*(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \sup(f, [a_k, a_{k+1}])$$

$$S_*(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf(f, [a_k, a_{k+1}])$$

$$\text{Sabemos } \inf(f, [a_k, a_{k+1}]) \leq \sup(f, [a_k, a_{k+1}])$$

↑
multiplico por $(a_{k+1} - a_k) > 0$

Sumo para todos los k

$$S_*(f, P) \leq S^*(f, P) \quad \checkmark$$

$$S^*(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \sup(f, [a_k, a_{k+1}])$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot M = M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_k$$

$$\text{Análogo para } S_*(f, P) \geq m \cdot (b-a) = m \cdot (b-a)$$

2) Tengo Q más fina que $P = \{a_0, \dots, a_n\}$

$$Q = \{ \underset{\substack{\parallel \\ a_0 \\ \parallel \\ a}}{b_0}, \dots, \underset{\substack{\parallel \\ a_1}}{b_{k_1}}, \dots, \underset{\substack{\parallel \\ a_2}}{b_{k_2}}, \dots, \underset{\substack{\parallel \\ a_{n-1}}}{b_{k_{n-1}}}, \dots, \underset{\substack{\parallel \\ a_n \\ \parallel \\ b}}{b_{k_n}} \}$$

$$S^*(f, Q) = \sum_{k=0}^{k_n-1} (b_{k+1} - b_k) \cdot \sup(f, [b_k, b_{k+1}])$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} (b_{k+1} - b_k) \cdot \sup(f, [b_k, b_{k+1}]) \quad (*)$$

Cuando $k_i \leq k \leq k_{i+1}-1$, $[b_k, b_{k+1}] \subset [a_i, a_{i+1}]$

$$\sup(f, [b_k, b_{k+1}]) \leq \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$

$$(*) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} (b_{k+1} - b_k) \cdot \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \cdot \underbrace{\sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} (b_{k+1} - b_k)}_{a_{i+1} - a_i}$$

$$= S^*(f, P)$$

$$S_*(f, P) \leq S_*(f, Q) \text{ análogo}$$

$$3) S_*(f, P) \leq S_*(f, P \cup Q) \leq S^*(f, P \cup Q) \leq S^*(f, Q) \quad \checkmark$$