Ecuaciones de variación en sistemas isotérmicos

Capítulo 3 - Bird

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Fenómenos de Transporte en Ingeniería de Procesos

Ecuaciones de variación

Son ecuaciones diferenciales generales que describen la variación de una propiedad en el espacio y el tiempo. Se desarrollan para un sistema general y luego se ajustan al sistema de interés.

Sistema isotérmico:

- Balance diferencial de materia o Ecuación de Continuidad
- Balance diferencial de cant. de movimiento o Ecuación de Variación de CDM

Ecuaciones de variación

En Sistemas no isotérmicos se agregarán:

- Balance de energía total
- Balance de energía térmica

En sistemas con variación de concentración (sistemas multicomponente)

- Balance de masa para especies químicas o ecuación de continuidad de la especie química de interés.

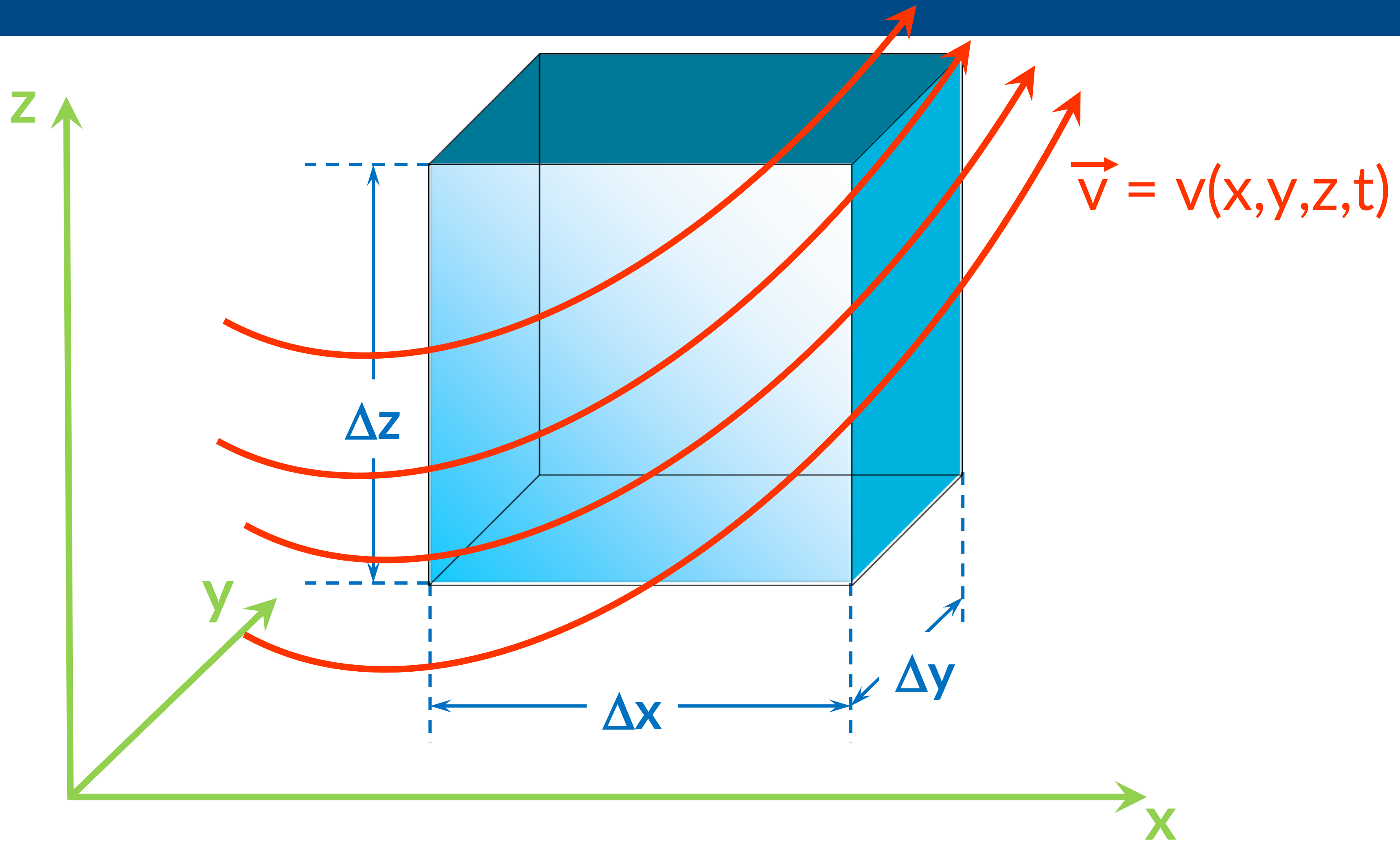
Ecuaciones de variación

Realizaremos un balance de envoltura para un fluido con un escurrimiento general, con un vector velocidad que presenta todas las direcciones ($\vec{v} = \left[v_x, v_y, v_z, t\right]$), en un volumen de control estacionario de dimensiones diferenciales Δx, Δy, Δz.

En dicho volumen plantearemos:

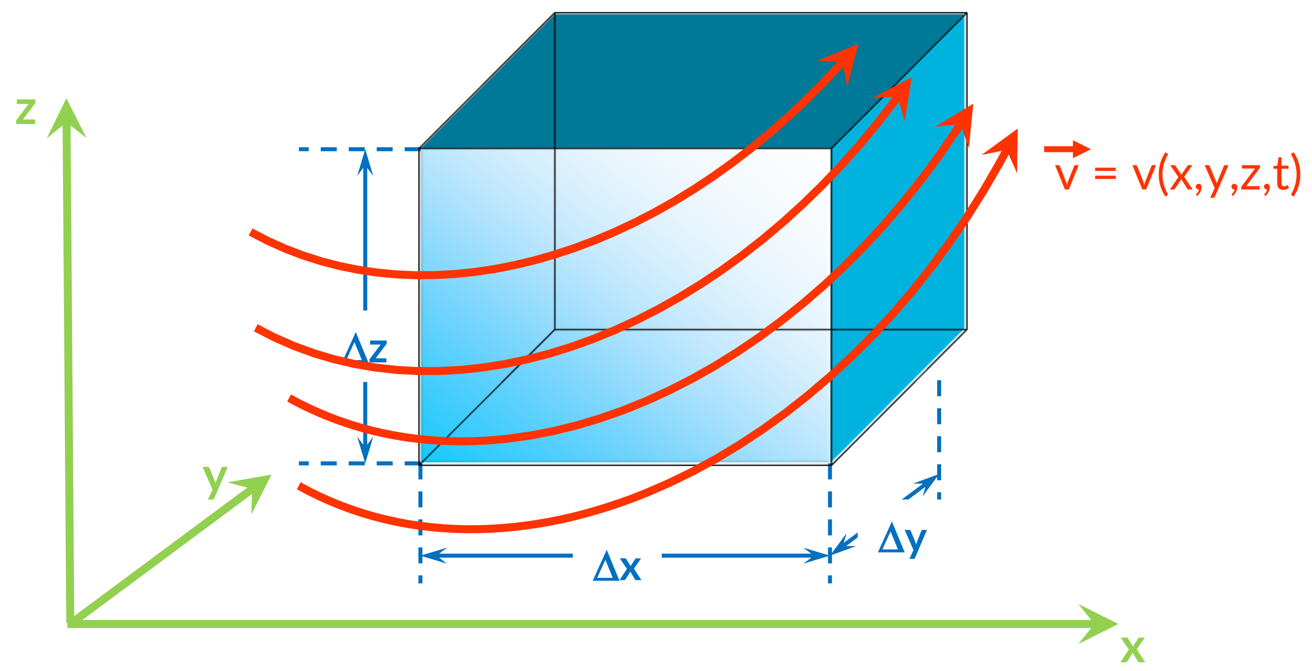
- Balance de masa
- Balance de cantidad de movimiento

Ecuaciones de variación



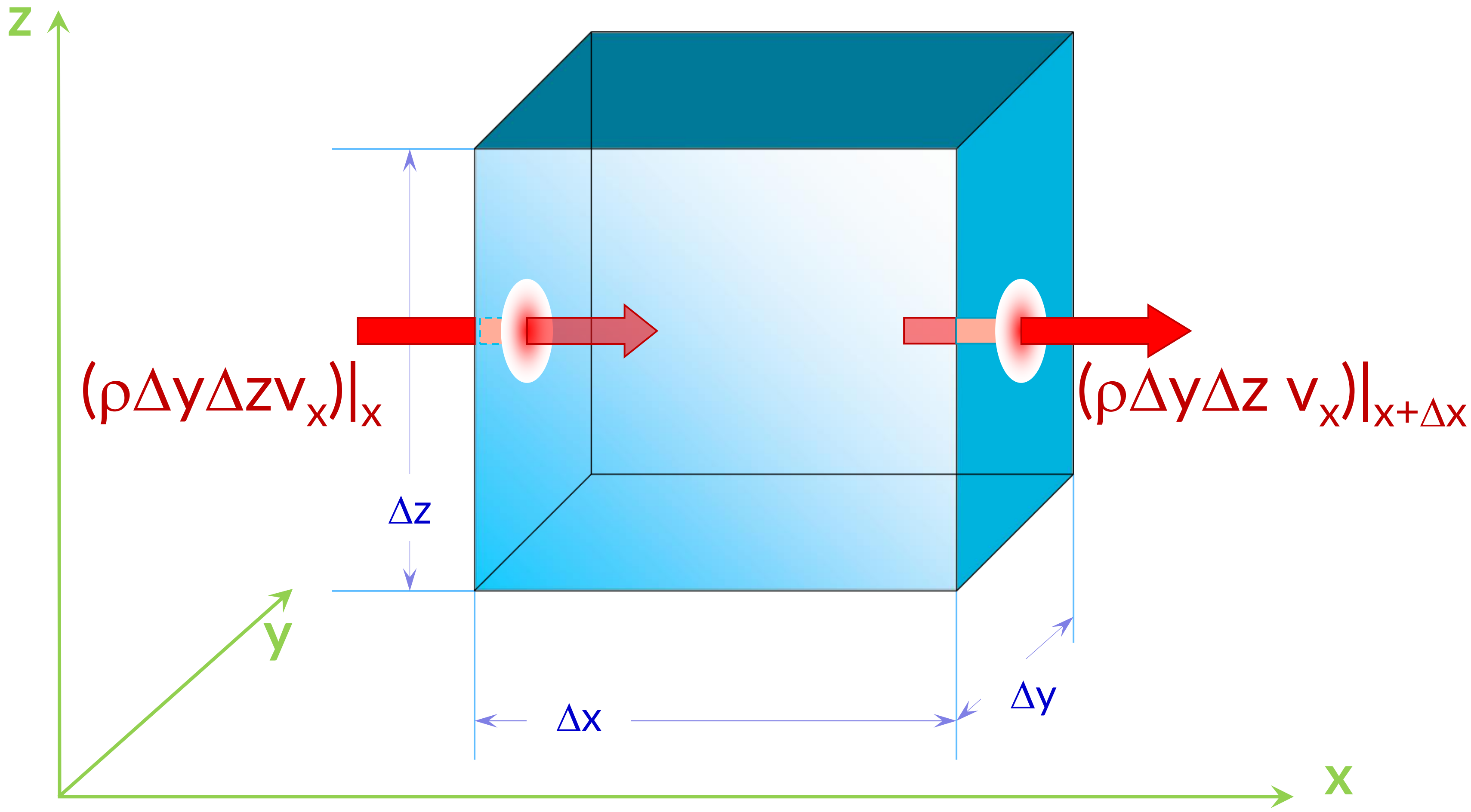
Ecuación de continuidad

$$\begin{Bmatrix}\text{vel de entrada}\\ \text{de MASA al VC}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{vel de salida de}\\ \text{MASA del VC}\end{Bmatrix} = \frac{\partial M}{\partial t}$$



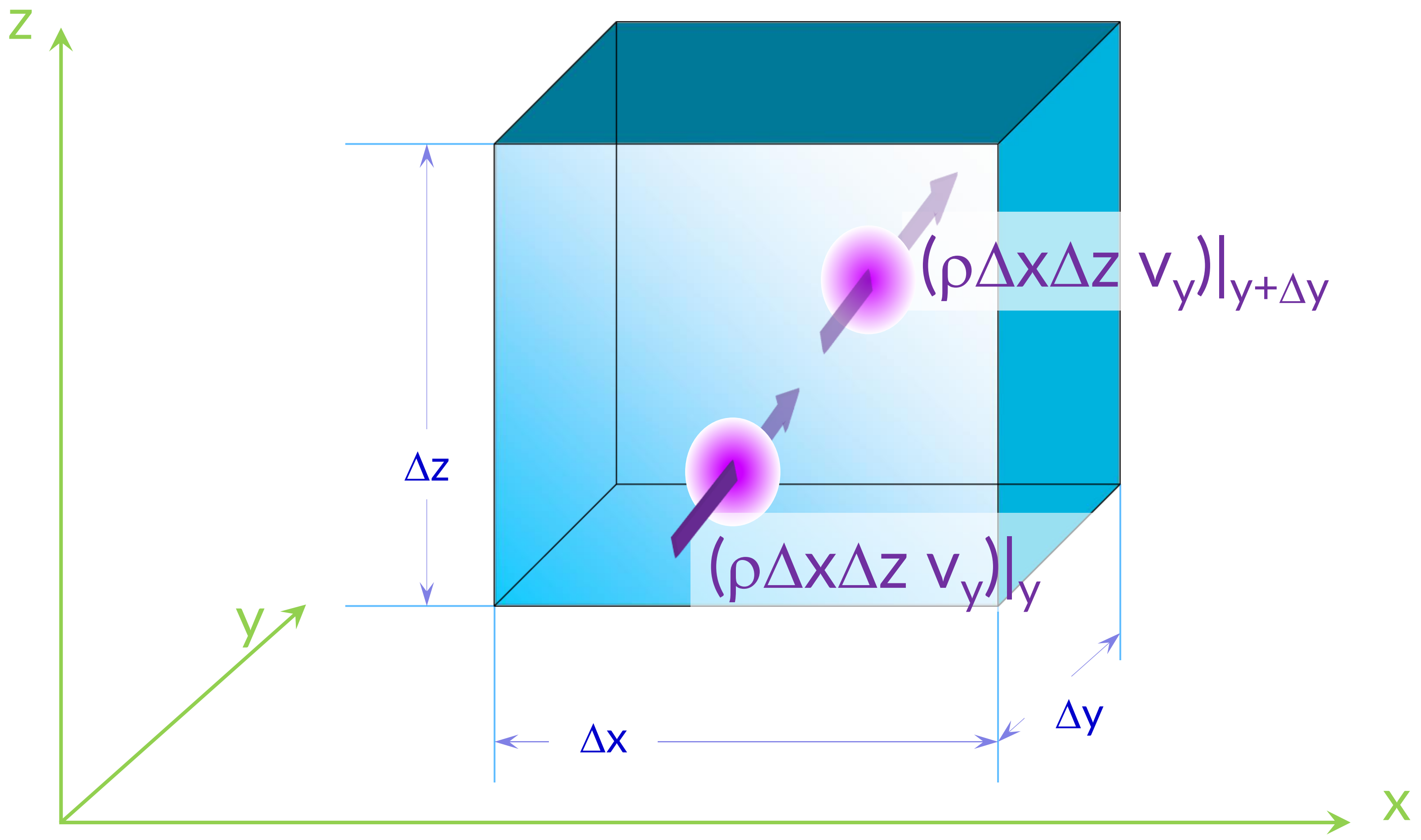
Ecuación de continuidad

Ingreso y egreso de masa según **x:**



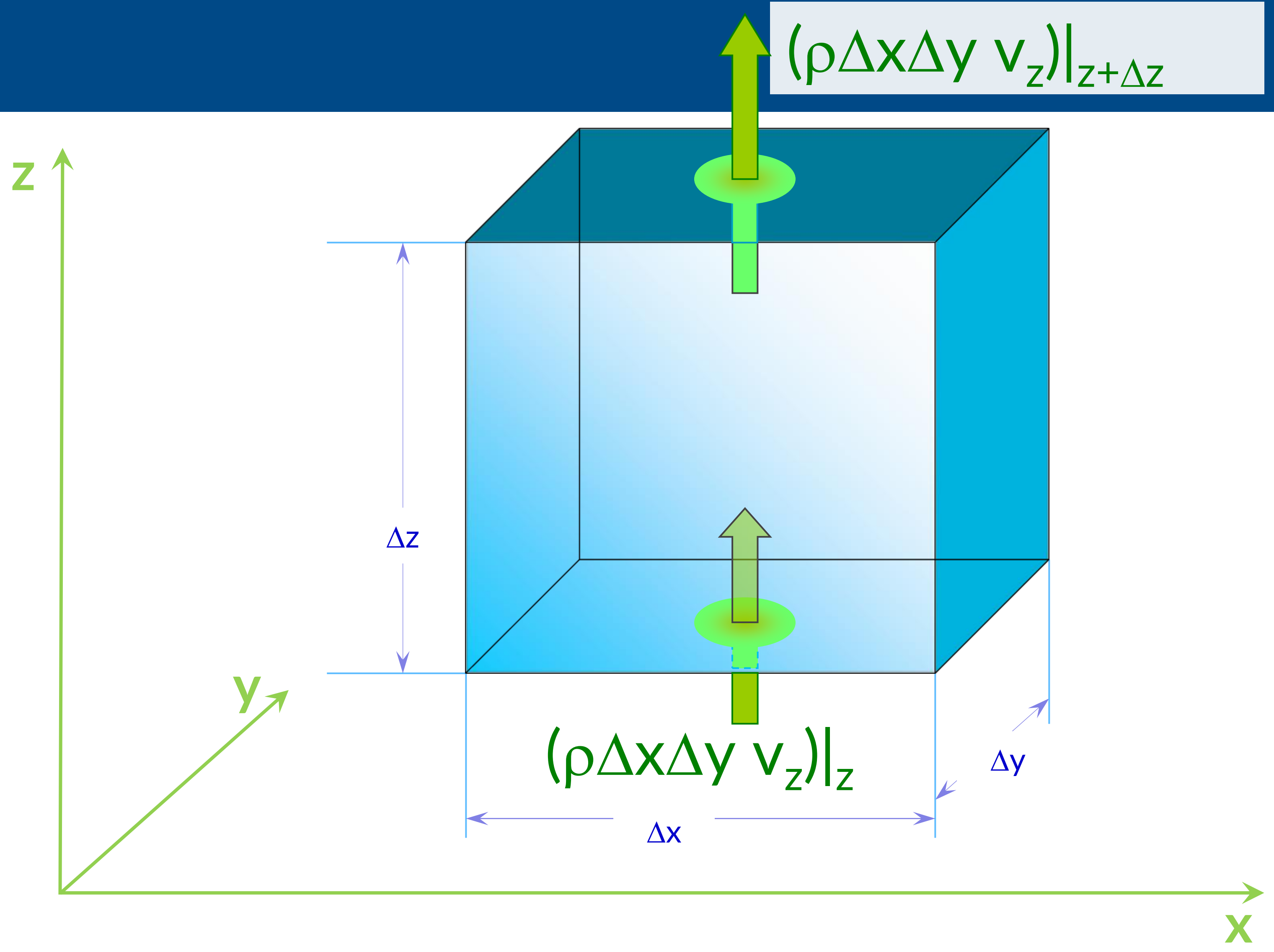
Ecuación de continuidad

Ingreso y egreso de masa según **y**:



Ecuación de continuidad

Ingreso y egreso de masa según **z**:



Ecuación de continuidad

$$\nabla x \nabla y \nabla z \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = \nabla y \nabla z \left[(\rho v_x)\Big|_x - (\rho v_x)\Big|_{x+\Delta x} \right] + \nabla x \nabla z \left[(\rho v_y)\Big|_y - (\rho v_y)\Big|_{y+\Delta y} \right]$$
$$+ \nabla x \nabla y \left[(\rho v_z)\Big|_z - (\rho v_z)\Big|_{z+\Delta z} \right]$$

Dividiendo entre el volumen ΔxΔyΔz

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = \frac{1}{\nabla x} \left[(\rho v_x)\Big|_x - (\rho v_x)\Big|_{x+\Delta x} \right] + \frac{1}{\nabla y} \left[(\rho v_y)\Big|_y - (\rho v_y)\Big|_{y+\Delta y} \right]$$
$$+ \frac{1}{\nabla z} \left[(\rho v_z)\Big|_z - (\rho v_z)\Big|_{z+\Delta z} \right]$$

Ecuación de continuidad

Tomando el límite cuando Δx, Δy, $\Delta z \rightarrow 0$,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z}\right)}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Derivada parcial

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})}$$

en notación vectorial

Representa la variación de la densidad en el tiempo que ve un observador que mira en un punto fijo del fluido

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v}\, \nabla \rho$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\, \nabla \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{v})}$$

Derivada substancial

Representa la variación de la densidad en el tiempo que ve un observador que se mueve junto con el fluido a la velocidad $\vec{v}$

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$$ Ecuación de continuidad

CASO PARTICULAR

Si el fluido es incompresible (ρ=CTE):

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 0}$$

Ecuación de continuidad para fluidos de densidad constante

La ecuación de continuidad aparece tabulada en Bird, para distintos sistemas coordenados: TABLA 3.4-1

LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN DISTINTOS SISTEMAS COORDENADOS

Coordenadas rectangulares (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad (A)$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad (B)$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \qquad (C)$$

Balance de cantidad de movimiento

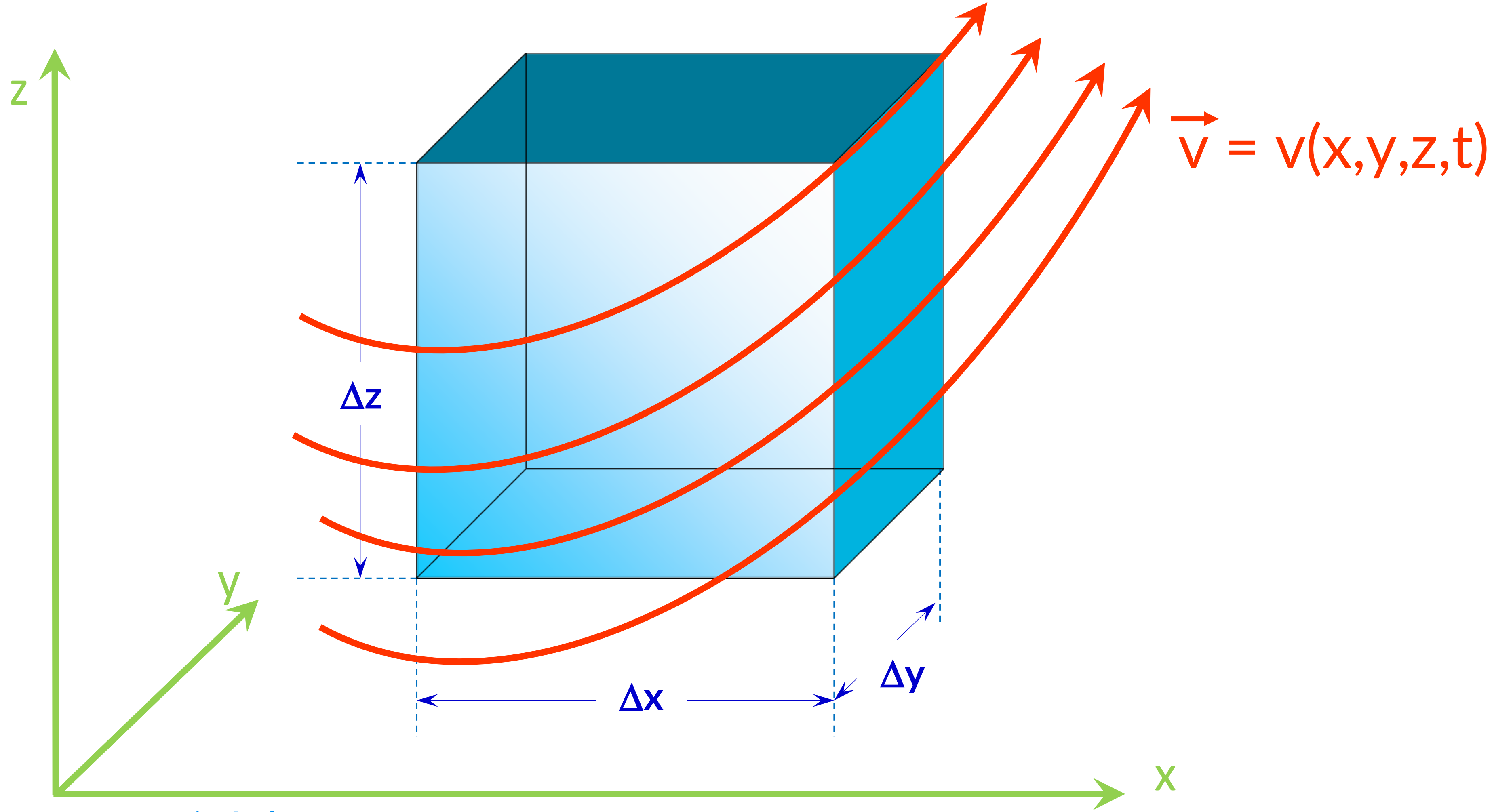
$$\begin{Bmatrix}\text{vel de entrada}\\ \text{de C.de M. al VC}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{vel de salida de}\\ \text{C.de M. del VC}\end{Bmatrix} + \sum_{\text{sistema}} \vec{F} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \text{t}}$$

Eje x: $$\frac{\partial p_x}{\partial t} = \begin{Bmatrix} vel.\,entrada\ de \\ CdM_x\ al\ VC \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} vel.\,salida\ de \\ CdM_x\ del\ VC \end{Bmatrix} + \sum_{sistema} F_x$$

Eje y: $$\frac{\partial p_y}{\partial t} = \begin{Bmatrix} vel.\,entrada\ de \\ CdM_y\ al\ VC \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} vel.\,salida\ de \\ CdM_y\ del\ VC \end{Bmatrix} + \sum_{sistema} F_y$$

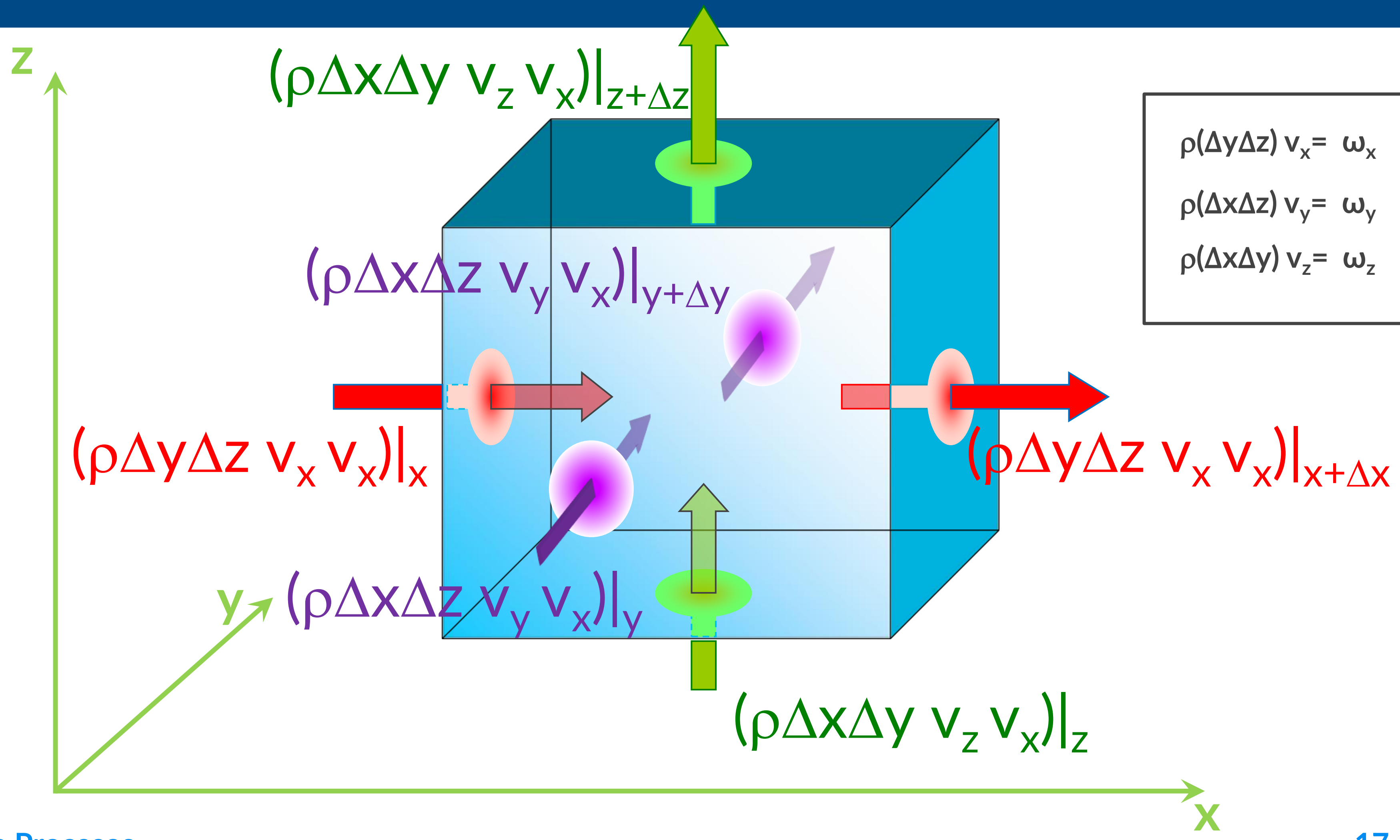
Eje z: $$\frac{\partial p_z}{\partial t} = \begin{Bmatrix} vel.\,entrada\ de \\ CdM_z\ al\ VC \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} vel.\,salida\ de \\ CdM_z\ del\ VC \end{Bmatrix} + \sum_{sistema} F_z$$

Balance de cantidad de movimiento



Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

Cantidad de movimiento que ingresa con la masa del fluido



$\rho(\Delta y\Delta z)\ v_x = \omega_x$

$\rho(\Delta x\Delta z)\ v_y = \omega_y$

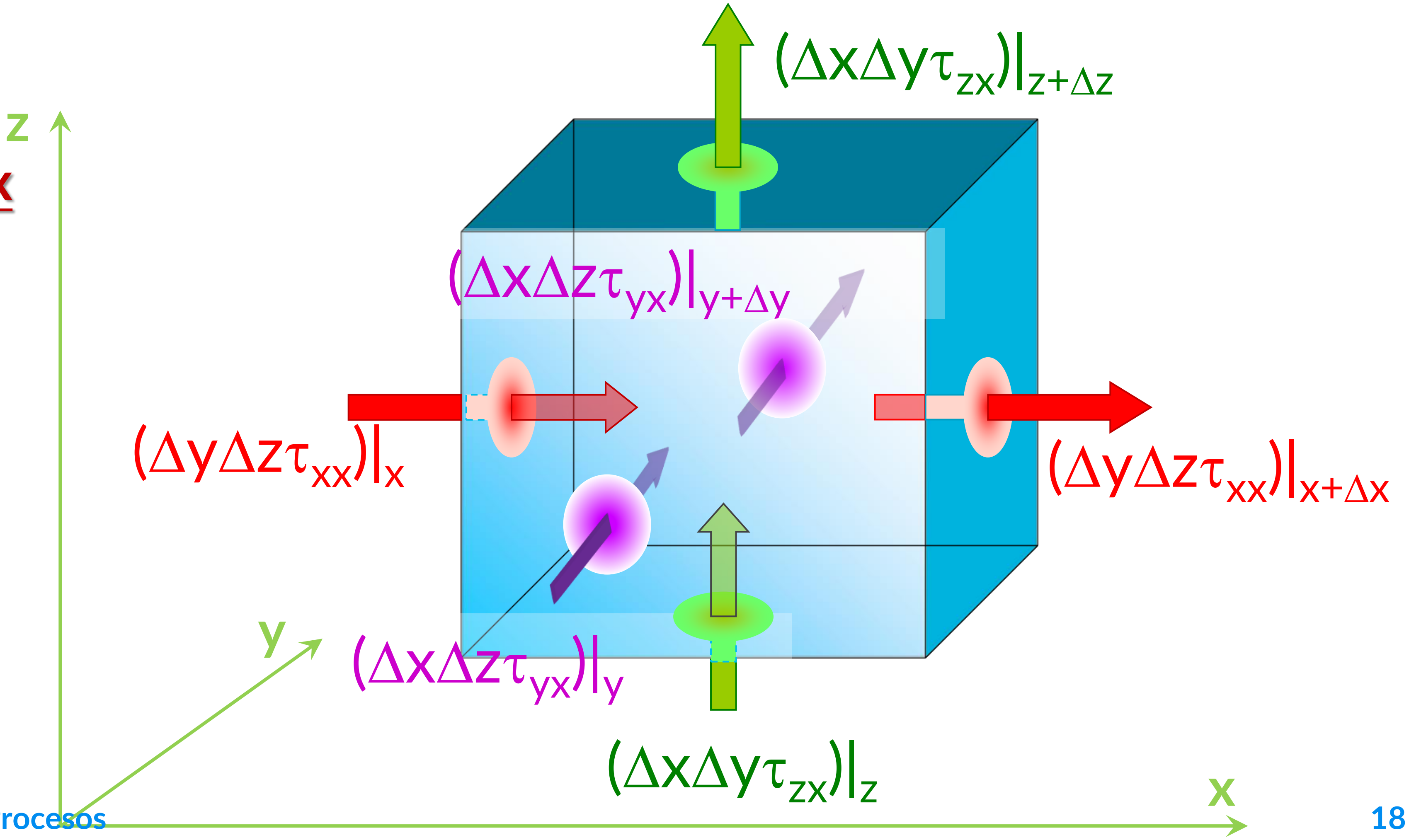
$\rho(\Delta x\Delta y)\ v_z = \omega_z$

Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

Cantidad de movimiento que ingresa y egresa debida a las fuerzas de rozamiento con dirección x

Los módulos de las 3 componentes del flujo de CDM con dirección x son: $[\tau_{xx}A_x, \tau_{yx}A_y, \tau_{zx}A_z]$.

Las flechas indican la dirección del flujo de cantidad de movimiento con dirección x.



Balance de cantidad de movimiento

Para la cantidad de movimiento que ingresa y egresa debido a las fuerzas de rozamiento F_x , F_y y F_z se hacen balances similares.

El módulo de las 3 componentes de la CDM según ***"y"*** serán:

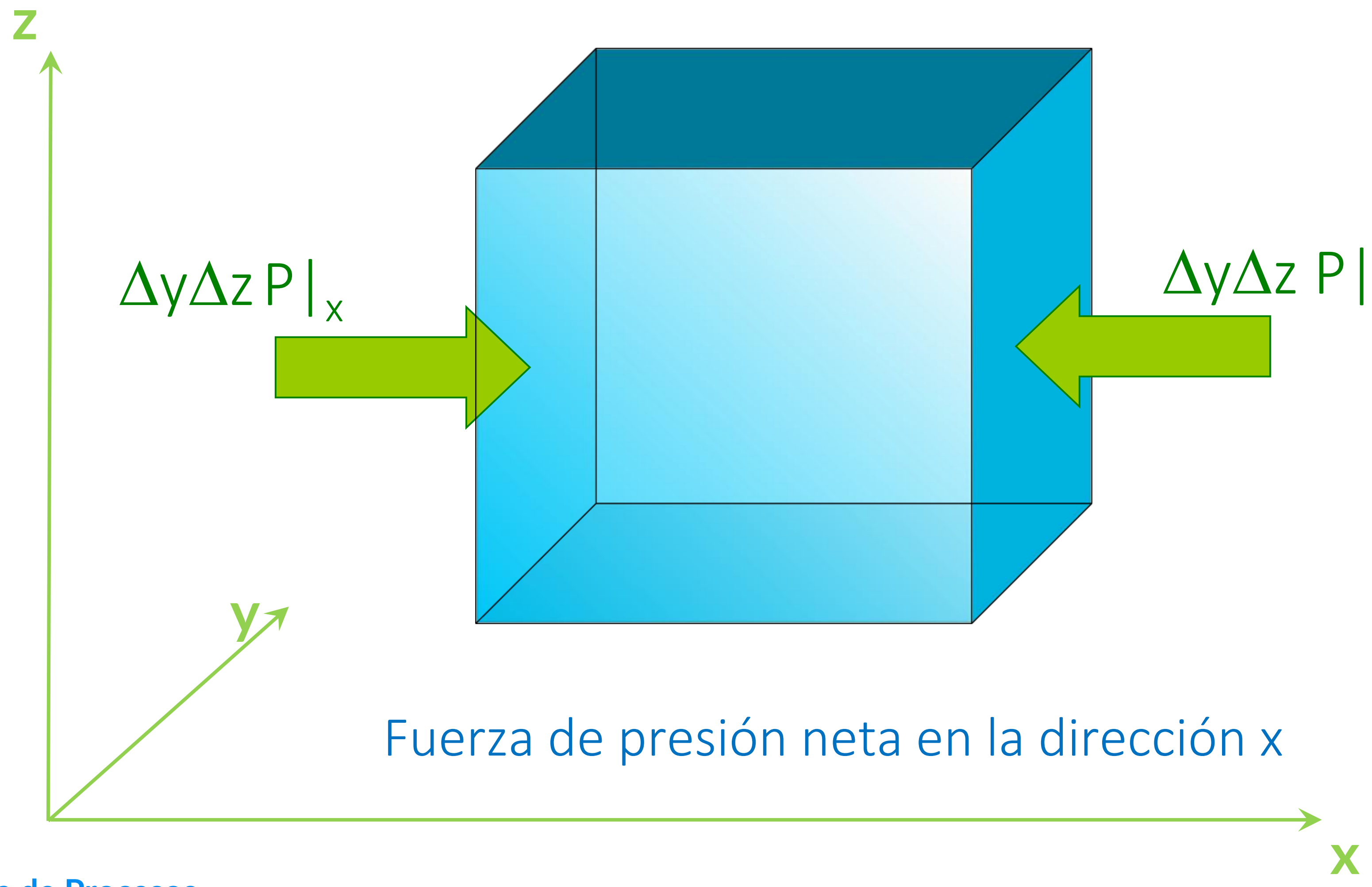
$$[\tau_{xy}A_x, \tau_{yy}A_y, \tau_{zy}A_z]$$

El módulo de las 3 componentes de la CDM según ***"z"*** serán:

$$[\tau_{xz}A_x, \tau_{yz}A_y, \tau_{zz}A_z]$$

Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

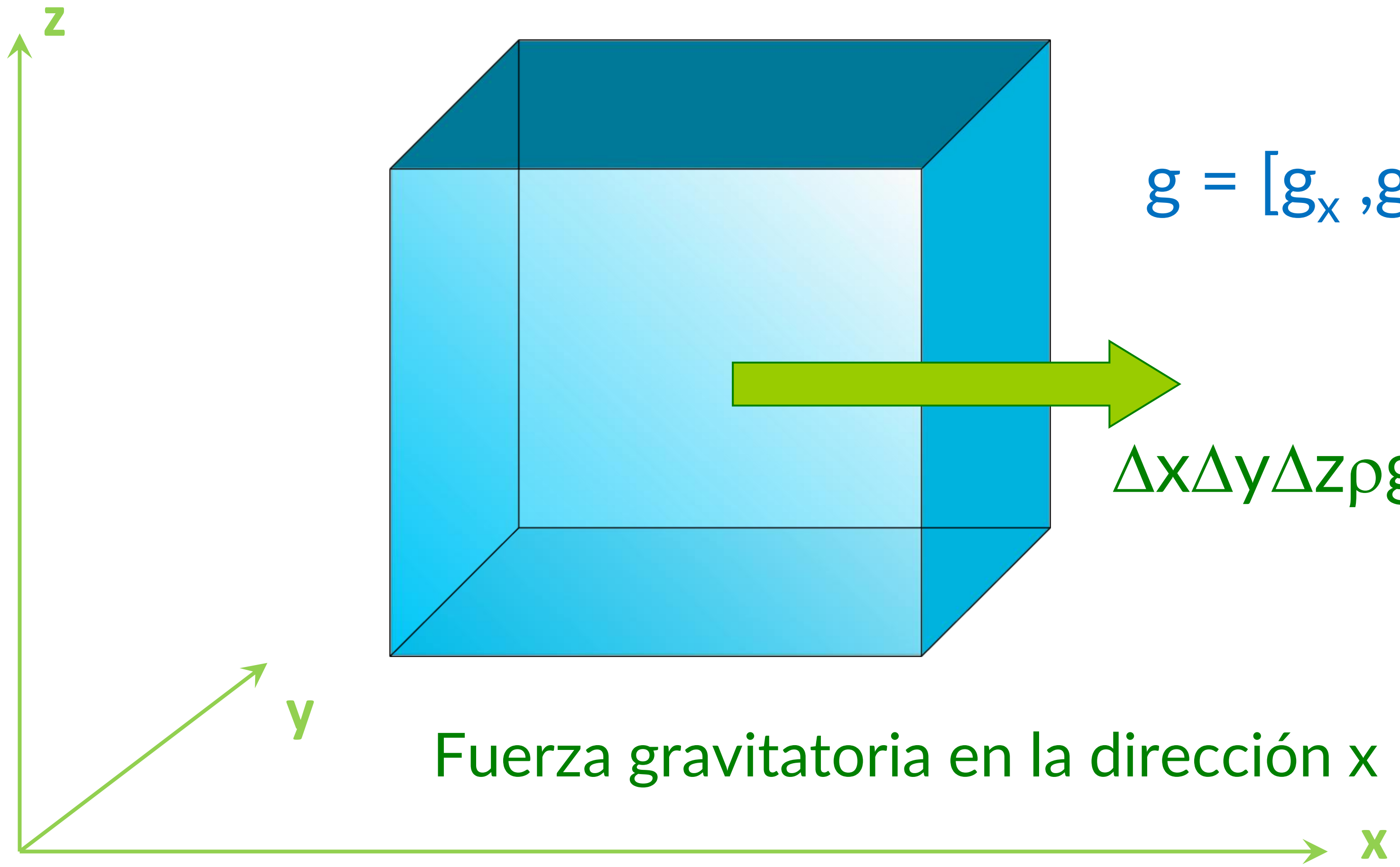
Componente x de las fuerzas que actúan sobre el VC: Fuerzas de presión



Fuerza de presión neta en la dirección x

Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

Componente x de las fuerzas que actúan sobre el VC: Peso del fluido



Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

$$\left\{\begin{matrix}\text{vel de entrada de} \\ CdM_x \text{ al VC}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{vel de salida de} \\ CdM_x \text{ del VC}\end{matrix}\right\} + \sum_{\text{sistema}} F_x = \frac{\partial p_x}{\partial t}$$

Cantidad de movimiento de dirección **x** que entra y sale con el fluido por **convección**

Cant. de mov. de dirección **x** que entra y sale por **transporte molecular** (rozamiento con las capas adyacentes)

Fuerza de presión neta en la dirección x

Fuerza gravitatoria en la dirección x

Acumulación de Cantidad de Mov. **x** en el VC

Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial t}\right) = \Delta y \Delta z \left[(\rho v_x v_x)\big|_x - (\rho v_x v_x)\big|_{x+\Delta x}\right] + \Delta x \Delta z \left[(\rho v_y v_x)\big|_y - (\rho v_y v_x)\big|_{y+\Delta y}\right]$$
$$+\Delta x \Delta y \left[(\rho v_z v_x)\big|_z - (\rho v_z v_x)\big|_{z+\Delta z}\right] +$$
$$+\Delta y \Delta z \left[(\tau_{xx})\big|_x - (\tau_{xx})\big|_{x+\Delta x}\right] + \Delta x \Delta z \left[(\tau_{yx})\big|_y - (\tau_{yx})\big|_{y+\Delta y}\right]$$
$$+\Delta x \Delta y \left[(\tau_{zx})\big|_z - (\tau_{zx})\big|_{z+\Delta z}\right] +$$
$$+\Delta y \Delta z \left[P\big|_x - P\big|_{x+\Delta x}\right] +$$
$$+\Delta x \Delta y \Delta z \rho g_x$$

Acumulación de Cantidad de Mov. en el VC

Cant. de mov. que entra y sale con el fluido por **convección**

Cant. de mov. que entra y sale por **transporte molecular**, asociado a esfuerzos de rozamiento

Fuerza de presión neta en la dirección **x**

Fuerza gravitatoria en la dirección **x**

Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

Dividiendo entre el volumen ΔxΔyΔz

$$\left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial t}\right) = \frac{1}{\Delta x}\left[(\rho v_x v_x)\big|_x - (\rho v_x v_x)\big|_{x+\Delta x}\right] + \frac{1}{\Delta y}\left[(\rho v_y v_x)\big|_y - (\rho v_y v_x)\big|_{y+\Delta y}\right]$$

$$+\frac{1}{\Delta z}\left[(\rho v_z v_x)\big|_z - (\rho v_z v_x)\big|_{z+\Delta z}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta x}\left[(\tau_{xx})\big|_x - (\tau_{xx})\big|_{x+\Delta x}\right] + \frac{1}{\Delta y}\left[(\tau_{yx})\big|_y - (\tau_{yx})\big|_{y+\Delta y}\right]$$

$$+\frac{1}{\Delta z}\left[(\tau_{zx})\big|_z - (\tau_{zx})\big|_{z+\Delta z}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta x}\left[P\big|_x - P\big|_{x+\Delta x}\right] +$$

$$+\rho g_x$$

Balance de cantidad de movimiento con dirección “x”

Tomando el límite cuando Δx, Δy, Δz → 0,

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) &= -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_x)\right] \\ &-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})\right] - \frac{\partial}{\partial x}(P) + \rho g_x\end{aligned}}$$

Ecuación diferencial que describe la variación de la componente x de la cantidad de movimiento

Le llamaremos ***componente x de la ecuación de variación de CDM en coordenadas cartesianas***

Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

en notación vectorial…

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \mathrm{v_x})}{\partial \mathrm{t}} = -(\nabla\cdot\rho v_x\vec{v}) - (\nabla\cdot\overrightarrow{\tau_x}) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \mathrm{g_x}}$$

en función de la derivada sustancial: $\frac{\partial(\rho \mathrm{v_x})}{\partial \mathrm{t}} + (\nabla\cdot\rho v_x\vec{v}) = -(\nabla\cdot\overrightarrow{\tau_x}) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho \mathrm{g_x}$

$$\boxed{\frac{D(\rho \mathrm{v_x})}{D\mathrm{t}} = -(\nabla\cdot\overrightarrow{\tau_x}) - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \rho \mathrm{g_x}}$$

Balance de cantidad de movimiento con dirección "x"

Realizando el mismo balance para TODAS las componentes resulta:

Componente **x**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_x)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})\right] - \frac{\partial}{\partial x}(P) + \rho g_x$$

Componente **y**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_y)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy})\right] - \frac{\partial}{\partial y}(P) + \rho g_y$$

Componente **z**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_z)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz})\right] - \frac{\partial}{\partial z}(P) + \rho g_z$$

Balance de cantidad de movimiento con dirección “x”

Las tres componentes se pueden escribir en una única ecuación vectorial ….

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) = -\nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) - \nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} - \vec{\nabla}P + \rho\vec{g}}$$

ó

$$\boxed{\rho\frac{D}{Dt}(\vec{v}) = -\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} - \vec{\nabla}P + \rho\vec{g}}$$

$$\rho\vec{v}\vec{v} = \begin{bmatrix} \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS RECTANGULARES (x,y,z)

TABLA 3.4-2

En función de τ:

componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho g_x \qquad (A)$$

componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + \rho g_y \qquad (B)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \rho g_z \qquad (C)$$

Cada componente de la ecuación de variación de CDM aparece tabulada en Bird, para distintos sistemas coordenados.

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (r, θ, z)

TABLA 3.4-3

En función de τ:

componente r[a]

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right) + \rho g_r \qquad (A)$$

componente θ[b]

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\right) + \rho g_\theta \qquad (B)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \rho g_z \qquad (C)$$

TABLA 3.4-4

En función de $\boldsymbol{\tau}$:

componente r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{r\theta}\operatorname{sen}\theta)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r}\right) + \rho g_r \qquad (A)$$

componente θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot\theta}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta\theta}\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi}\right.$$

$$\left. + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\phi\phi}\right) + \rho g_\theta \qquad (B)$$

componente φ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r}\cot\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi}\right.$$

$$\left. + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi}\right) + \rho g_\phi \qquad (C)$$

Balance de cantidad de movimiento con dirección “x”

Hasta aquí no hemos puesto ninguna condición por lo que las ecuaciones de variación que acabamos de ver son de **aplicación general**...

Son válidas tanto para flujo laminar, flujo turbulento, fluidos newtonianos o fluidos no newtonianos, estado estacionario o estados transitorios

Balance de cantidad de movimiento

Comparando con la metodología del tema anterior

1. Considerar geometría

   Elección de sistema de ejes coordenadas
2. Elección de un elemento de volumen de espesor infinitesimal (envoltura)
3. Balances de masa y cantidad de movimiento
4. Generar las ecuaciones diferenciales
5. Incorporación de la relación entre esfuerzo cortante y gradiente de velocidades
6. Integración para obtener el perfil de velocidades
7. Cálculo de las magnitudes de interés
8. Revisión de las suposiciones

ESTAMOS ACÁ

Ley de newton generalizada

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Para obtener una matriz simétrica, se agrupan los esfuerzos cortantes con iguales subíndices, sumándolos.

Esto no quiere decir que siempre que exista τ_{ij} exista τ_{ji} aunque en esta matriz se lo coloque en los de las posiciones.

COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS RECTANGULARES (x, y, z)

$$\tau_{xx} = -\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \quad (A)$$

$$\tau_{yy} = -\mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \quad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \quad (C)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right] \quad (D)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right] \quad (E)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right] \quad (F)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (G)$$

Balance de cantidad de movimiento

Sustituyendo las expresiones de τ se obtienen las ecs. generales de variación de cant. de movimiento para un **fluido Newtoniano con ρ y μ variables** (Ecs. 3.2-17, 3.2-18 y 3.2-19).

$$\rho\frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] + \rho g_x \quad (3.2\text{–}17)$$

$$\rho\frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] + \rho g_y \quad (3.2\text{–}18)$$

$$\rho\frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot v)\right] + \rho g_z \quad (3.2\text{–}19)$$

Balances de cantidad de movimiento

Fluidos Newtonianos, ρ y μ constantes

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt}(\vec{v}) = \mu \nabla^2 \vec{v} - \nabla P + \rho \vec{g}}$$

Bird Tablas 3.4-2 a 3.4-4 D, E, F

Ecuación de Navier - Stokes

Fluidos sin efectos viscosos (μ→0)

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt}(\vec{v}) = -\nabla P + \rho \vec{g}}$$

Ecuación de Euler

Balances de cantidad de movimiento

COORDENADAS RECTANGULARES

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

TABLA 3.4-2

Ecuación de Navier - Stokes

componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x \qquad (D)$$

componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \rho g_y \qquad (E)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \rho g_z \qquad (F)$$

Balances de cantidad de movimiento

COORDENADAS CILÍNDRICAS

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

TABLA 3.4-3

componente r[a]

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] + \rho g_r \qquad (D)$$

componente θ[b]

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] + \rho g_\theta \qquad (E)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z \qquad (F)$$

Ecuación de Navier - Stokes

Balances de cantidad de movimiento

COORDENADAS ESFÉRICAS

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

TABLA 3.4-4

Componente r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2}\right] + \rho g_r$$

Ecuación de Navier - Stokes

Componente θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \sin\theta)\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right] + \rho g_\theta$$

Componente φ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r + v_\theta v_\phi \cot\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\phi \sin\theta)\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2\cot\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right] + \rho g_\phi$$

Ecuaciones de variación

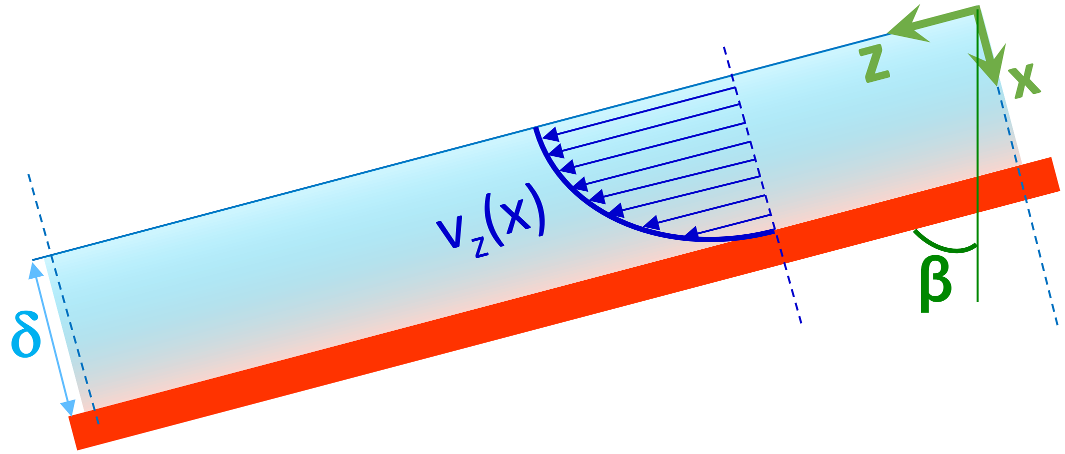
1. Considerar geometría. Elección de sistema de ejes coordenadas
2. Plantear las ecuaciones de variación (masa y cantidad de movimiento) para ese sistema de coordenadas
3. Descartar los términos que son nulos (o despreciables) usando para ello la percepción intuitiva sobre geometría, tipo de flujo, distribución de presión, etc...
4. Generar la ecuación diferencial que describe el sistema
5. Integrar dicha ecuación diferencial usando las condiciones de contorno del sistema
6. Calcular de las magnitudes de interés
7. Revisar las suposiciones

Ejemplo de uso de las ecuaciones de variación

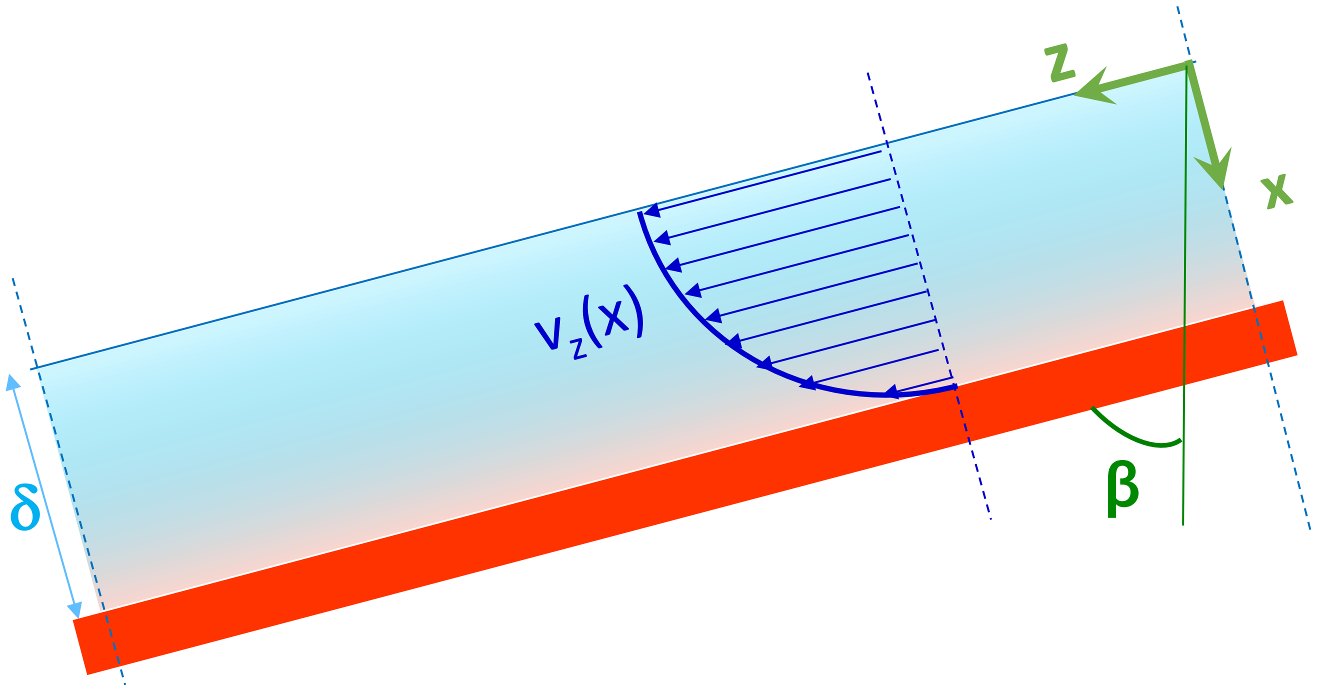
Película descendente de espesor δ sobre una superficie inclinada un ángulo β respecto a la vertical.

Suposiciones:

- **Estado estacionario.**
- **Placa: ancho B y largo L, inclinada un ángulo β.**
- **Espesor de líquido δ, con $B >> \delta$.**
- **Sin efectos de borde en la zona entre 0 y L.**
- **Escurrimiento en flujo laminar.**
- **Fluido newtoniano e incompresible (μ, ρ).**



Ejemplo de uso de las ecuaciones de variación



Elegimos coordenadas rectangulares, donde el eje z coincide con la superficie libre del líquido.

Ejemplo de uso de las ecuaciones de variación

LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN DISTINTOS SISTEMAS COORDENADOS

Coordenadas rectangulares (x, y, z):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0} \qquad (A)$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad (B)$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \qquad (C)$$

Ejemplo de uso de las ecuaciones de variación

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y}} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

E.E. $\quad v_x=0 \quad v_y=0$

$$\frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\rho=cte} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Flujo totalmente desarrollado

$\Rightarrow$ v_z no depende de z

$\Rightarrow$ $v_z = f(x)$

Ejemplo de uso de las ecuaciones de variación

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes:

componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x \qquad (D)$$

componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \rho g_y \qquad (E)$$

componente z

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \rho g_z} \qquad (F)$$

Ejemplo de uso de las ecuaciones de variación

Eje x

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x)} + \cancel{v_x \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)} + \cancel{v_y \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x)} + \cancel{v_z \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x)} =$$

E.E. $\quad v_x=0 \quad v_x=0,\ v_y=0 \quad v_x=0$

$$+\mu\left[\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_x)} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}(v_x)} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial z^2}(v_x)}\right] - \frac{\partial}{\partial x}(P) + \rho g_x$$

$v_x=0 \quad v_x=0 \quad v_x=0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(P) = +\rho g_x \quad \Longrightarrow \quad P = \rho(g \cdot sen\beta)x + P_0$$

Eje y

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) + v_x \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_y) + v_y \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_y) =$$

$$+\mu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v_y) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(v_y)\right] - \frac{\partial}{\partial y}(P) + \rho g_y$$

Geometría infinita según el eje “y”: no hay variación de ninguna propiedad en ese eje

Ecuación del movimiento

Eje z

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z)}_{\text{E.E.}} + \cancel{v_x \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_z)}_{v_x=0} + \cancel{v_y \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_z)}_{v_y=0} + \cancel{v_z \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)}_{\text{continuidad}} =$$

$$+\mu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_z) + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}(v_z)}_{\text{geom. infinita}} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial z^2}(v_z)}_{\text{continuidad}}\right] - \cancel{\frac{\partial}{\partial z}(P)}_{\text{sist. abierto}} + \rho g_z$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \rho g_z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = -\frac{\rho g_z}{\mu}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{\rho g_z}{\mu} x + C_1 \quad \Longrightarrow \quad v_z = -\frac{\rho g_z}{\mu}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Siendo C_1 y C_2 constantes de integración

Ejemplo de uso de las ecuaciones de variación

Necesitamos dos condiciones de contorno para la velocidad:

CC_1: En $x = \delta$, $v_z = 0$

CC_2: En $x = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$

Resolviendo:

$$\boxed{v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]}$$

Muchas gracias por tu atención