Señales y Sistemas

Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (SLITs)

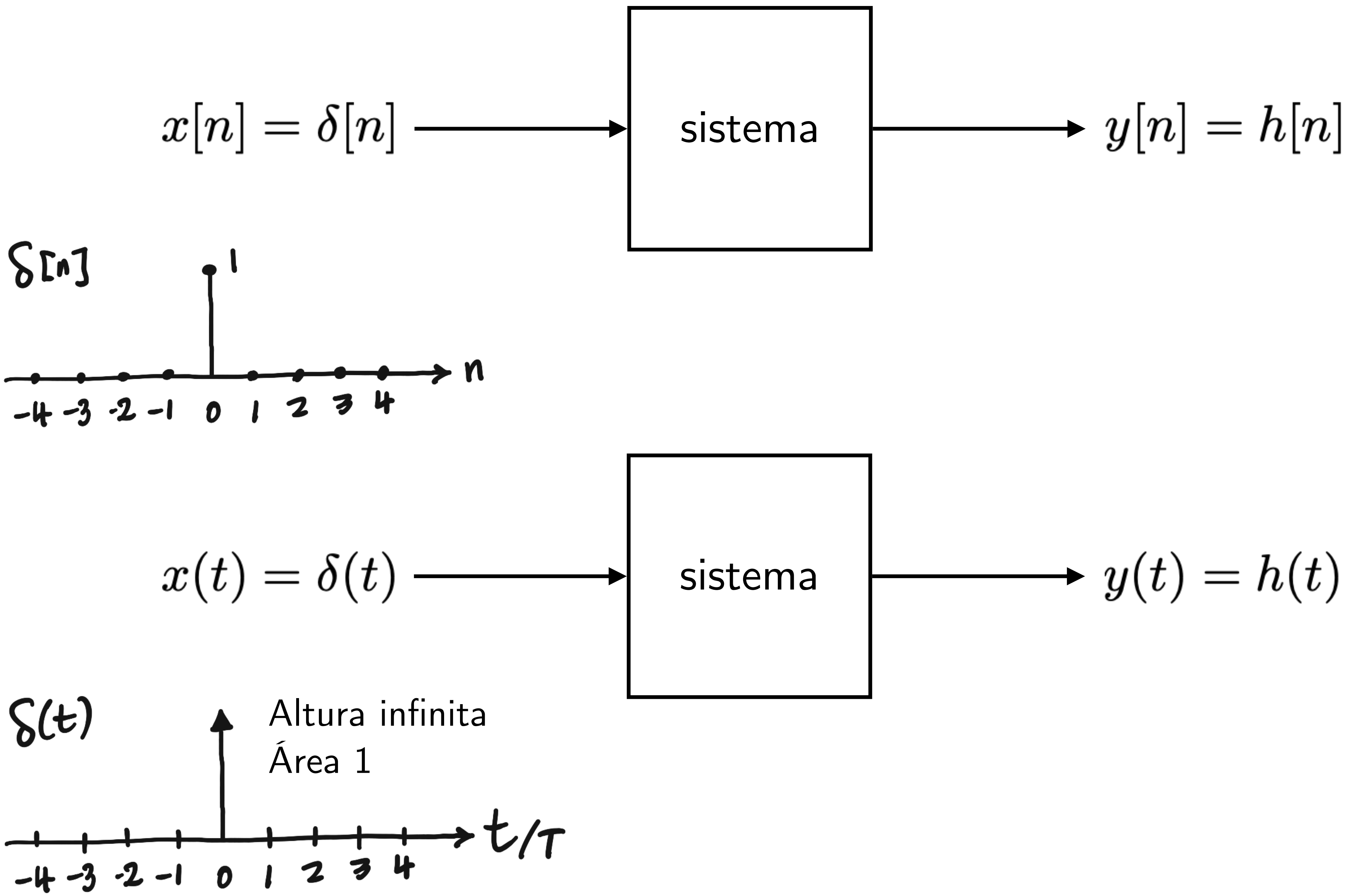
Instituto de Ingeniería Eléctrica

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Respuesta al impulso

- La respuesta al impulso es la salida de un sistema cuando la entrada es un impulso (una delta).



Ejemplos

- Acumulador con interés

$$y[n] = (1+\alpha)y[n-1] + x[n]$$

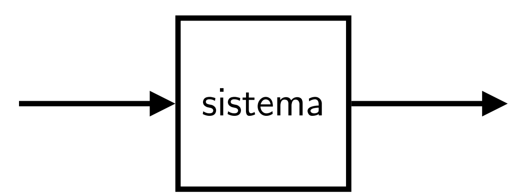
- Diferenciador

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Teorema de convolución para SLITs

- Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo (SLIT) con respuesta al impulso $h[n]$, entonces, para una entrada arbitraria $x[n]$ la salida $y[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso.

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

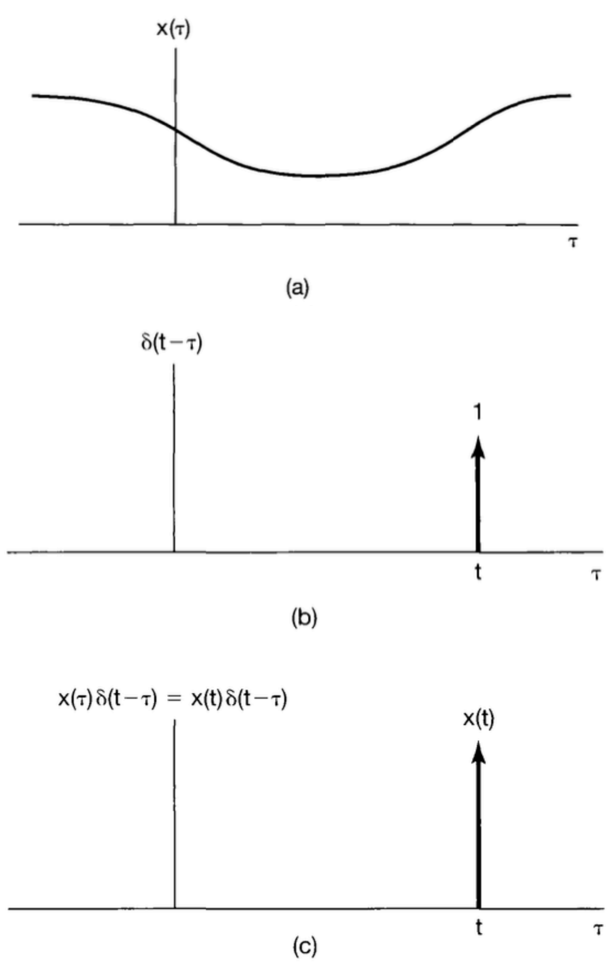
- Pasos de la demostración:
  1. Mostrar que se puede escribir: $x[n] = \sum_k x[k]\, \delta[n-k]$
  2. Usar invarianza temporal: $\delta[n-k]$ 

 $h[n-k]$
  3. Usar linealidad: $y[n] = \sum_k x[k]\, h[n-k]$

Teorema de convolución para SLITs

- Lo mismo vale para un SLIT de variable continua

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

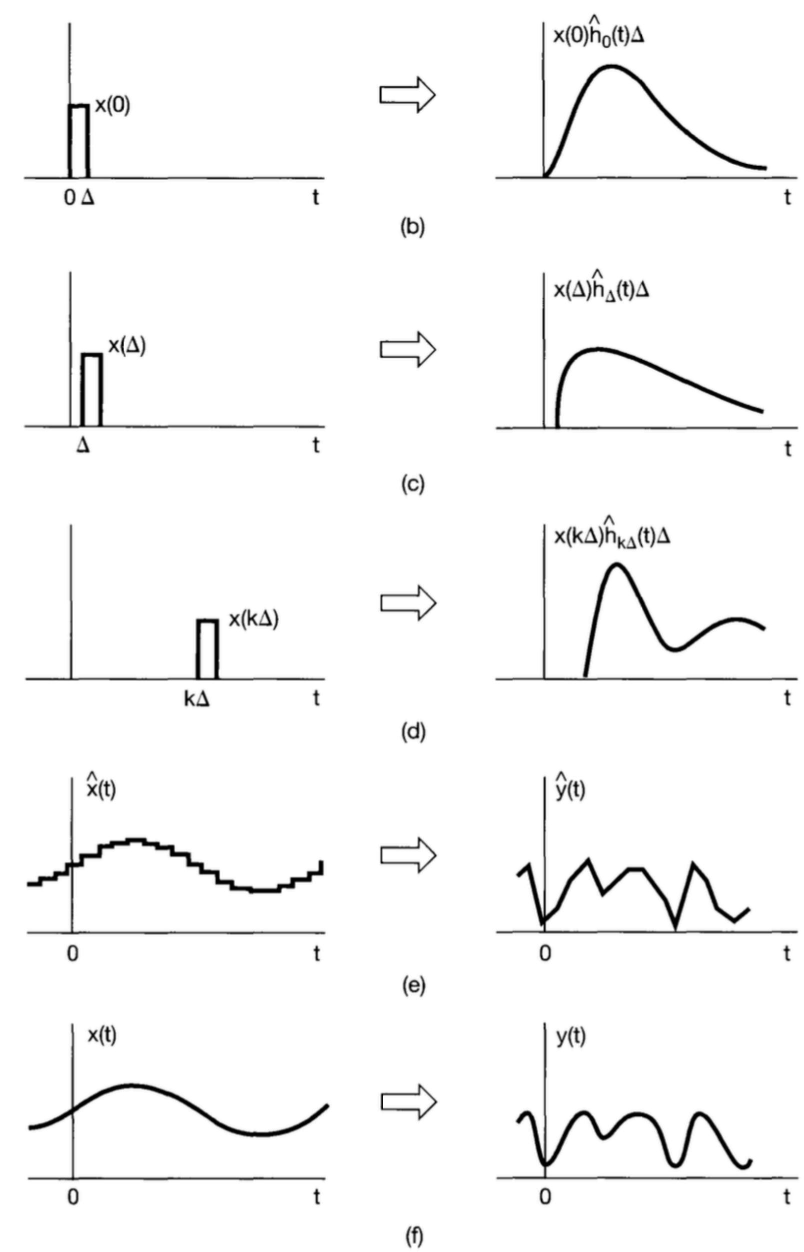


$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau =$$

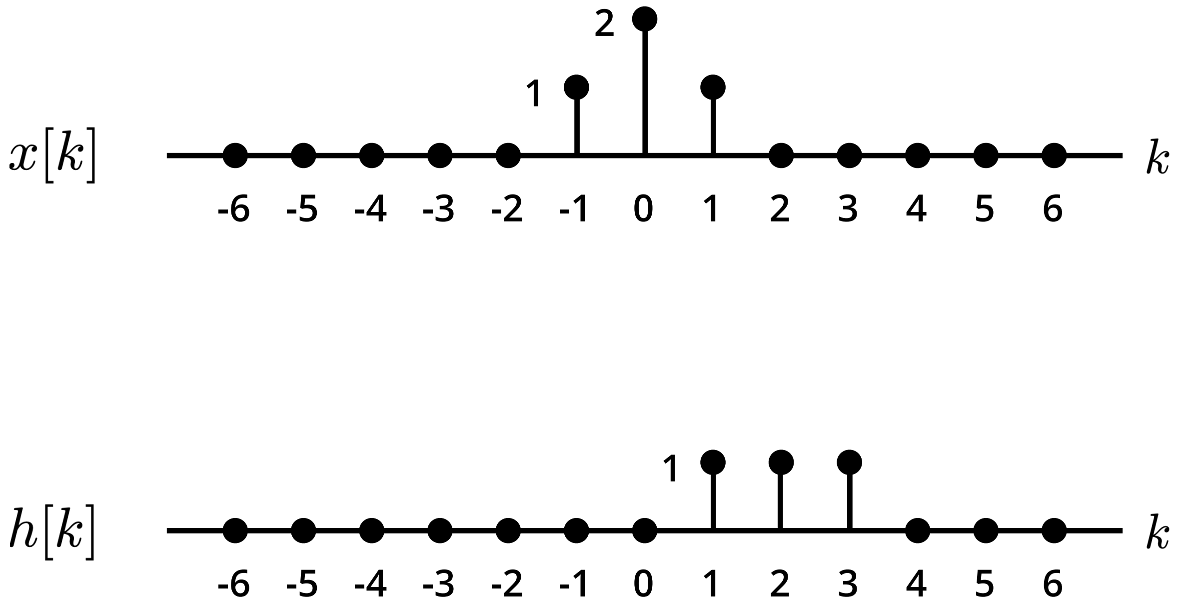
$$x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

Funciones de τ

$$x(\tau)\,\delta(t-\tau) = x(t)\,\delta(t-\tau)$$

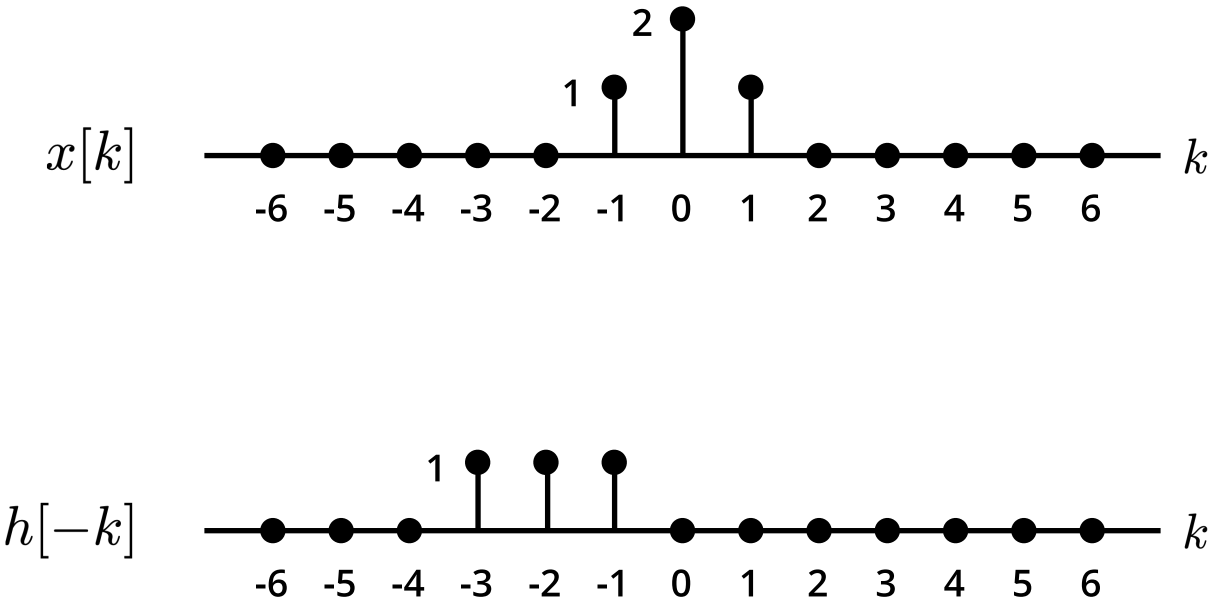


La convolución (discreta)



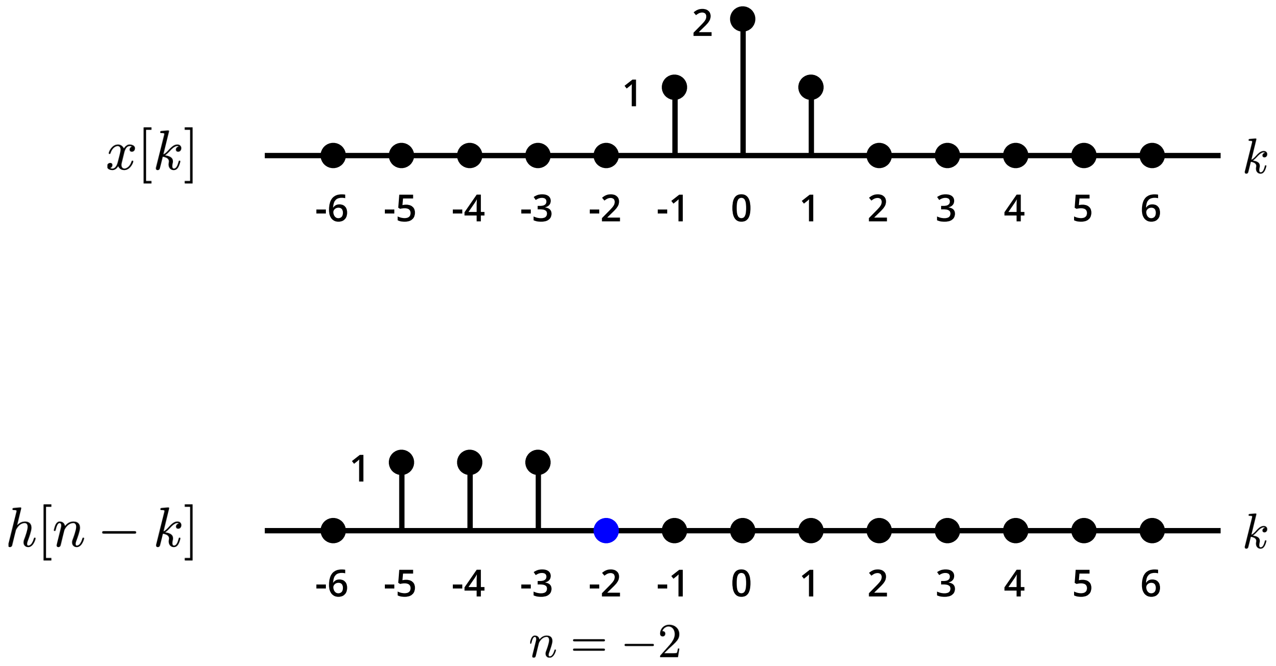
$$y[n] = (x[k] * h[k])[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[n-k]h[k]$$

La convolución (discreta)



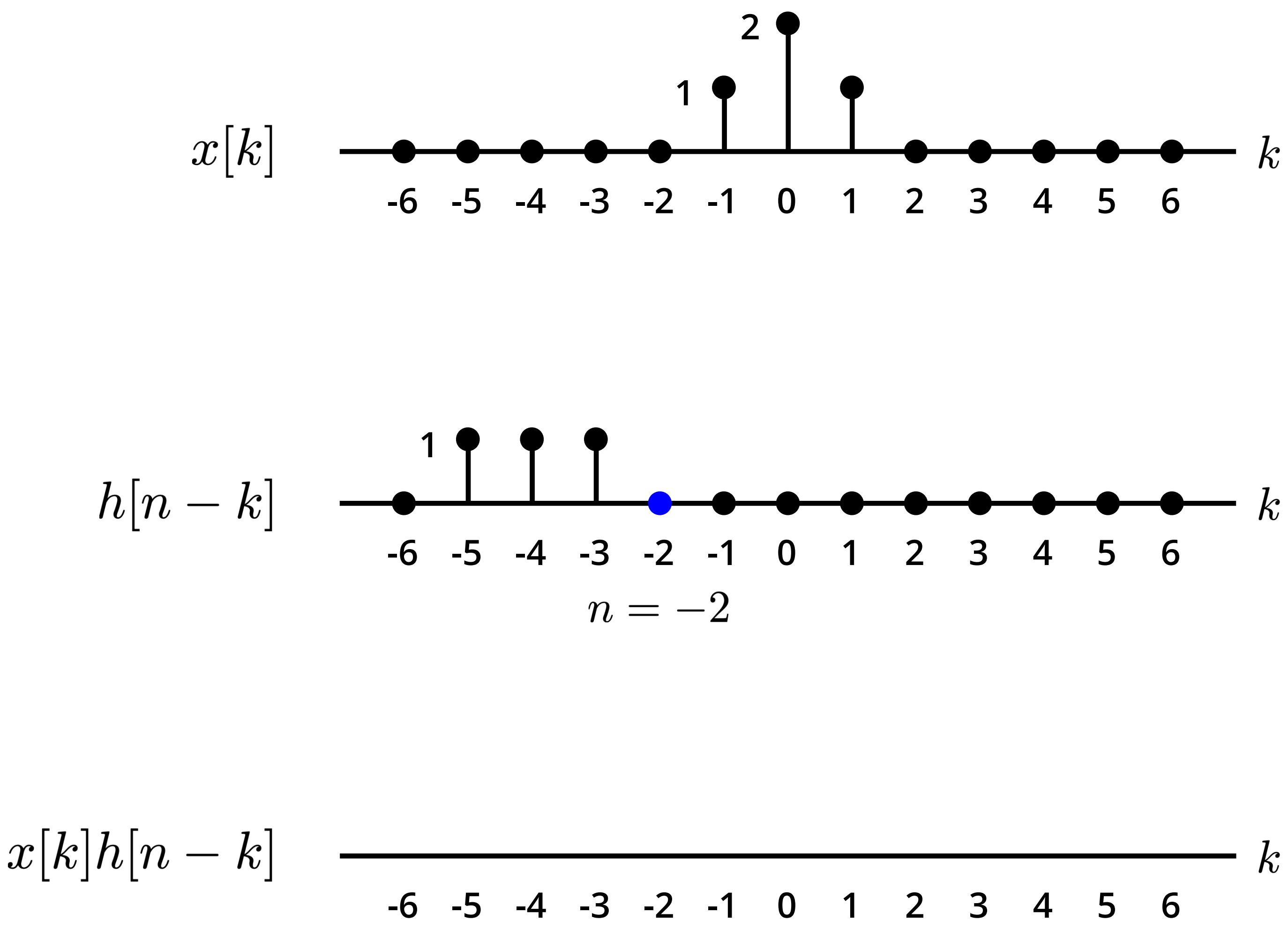
$$y[n] = (x[k] * h[k])[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[n-k]h[k]$$

La convolución (discreta)

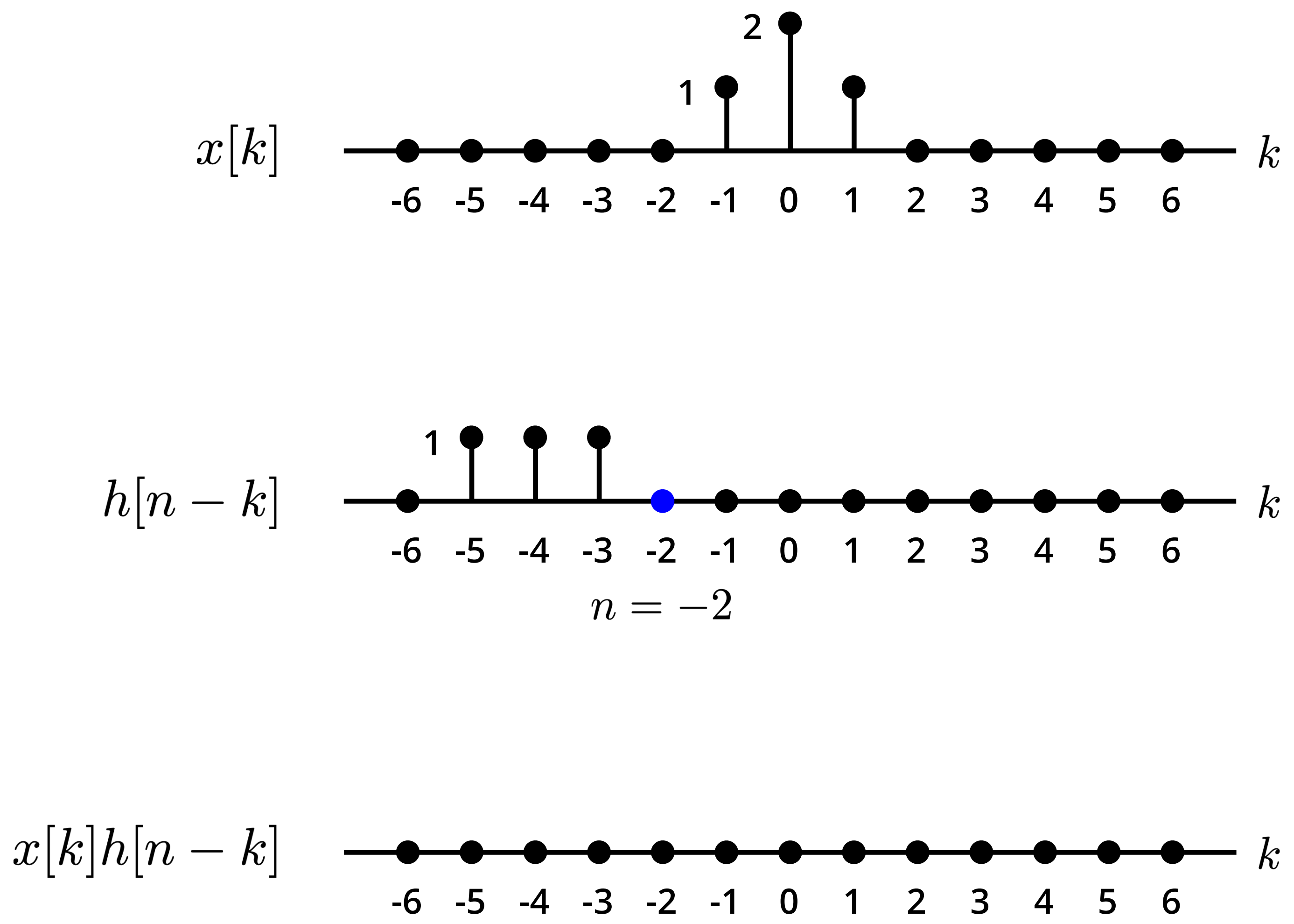


$$y[n] = (x[k] * h[k])[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[n-k]h[k]$$

La convolución (discreta)

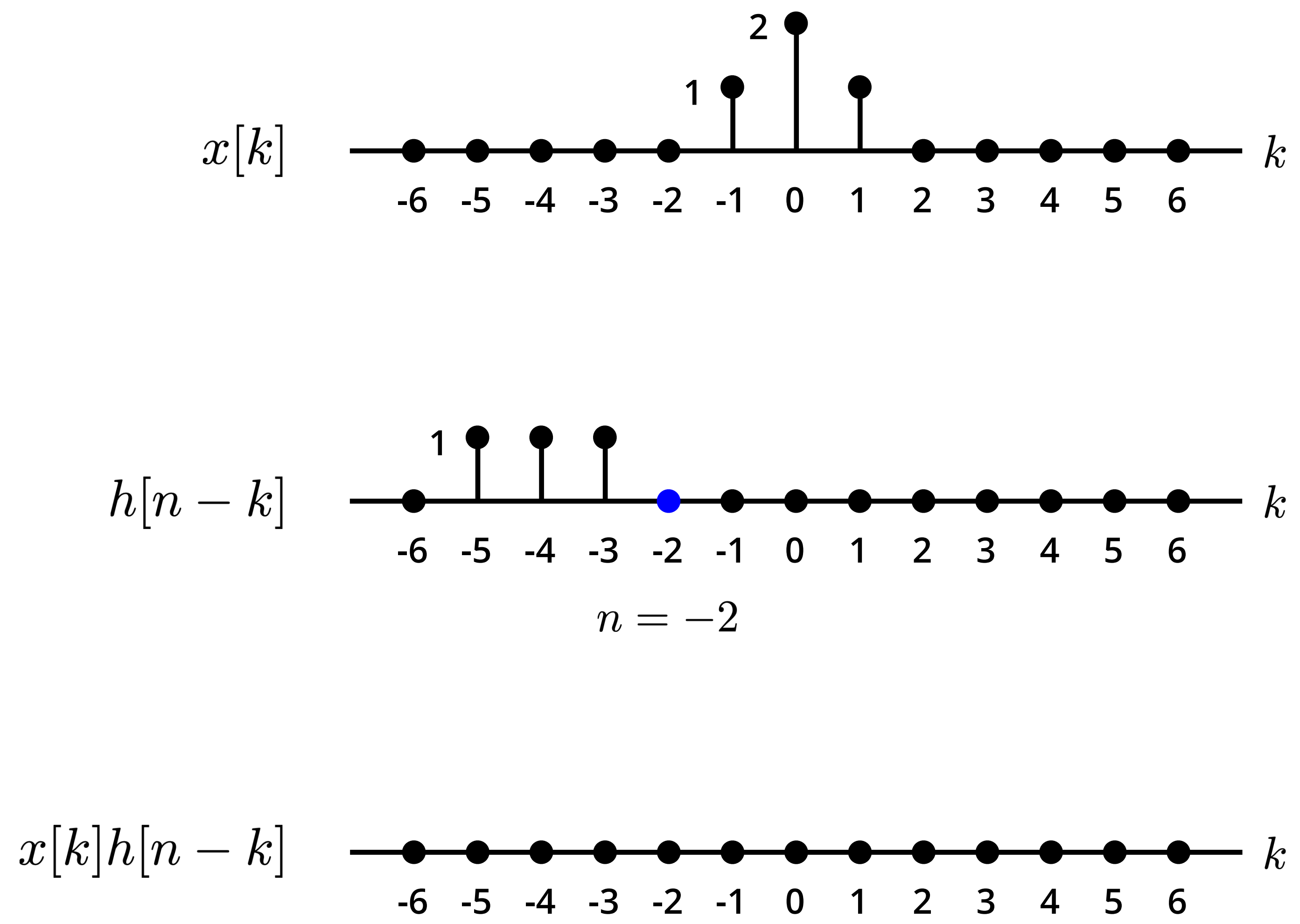


La convolución (discreta)

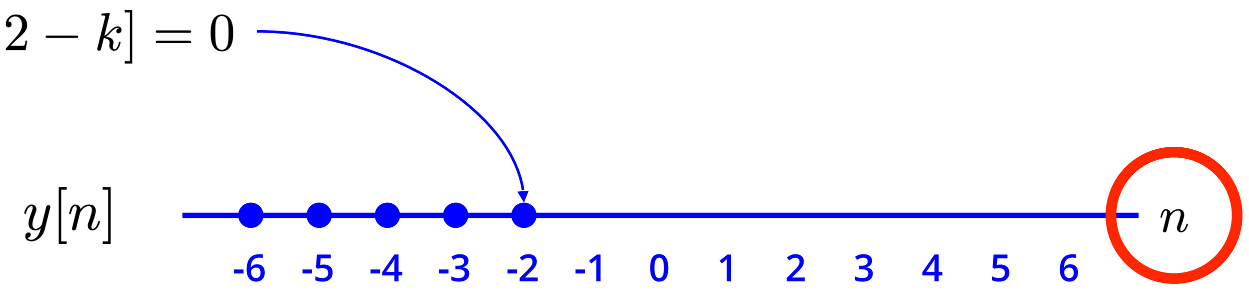


$$y[-2] = \sum_k x[k]h[-2-k] = 0$$

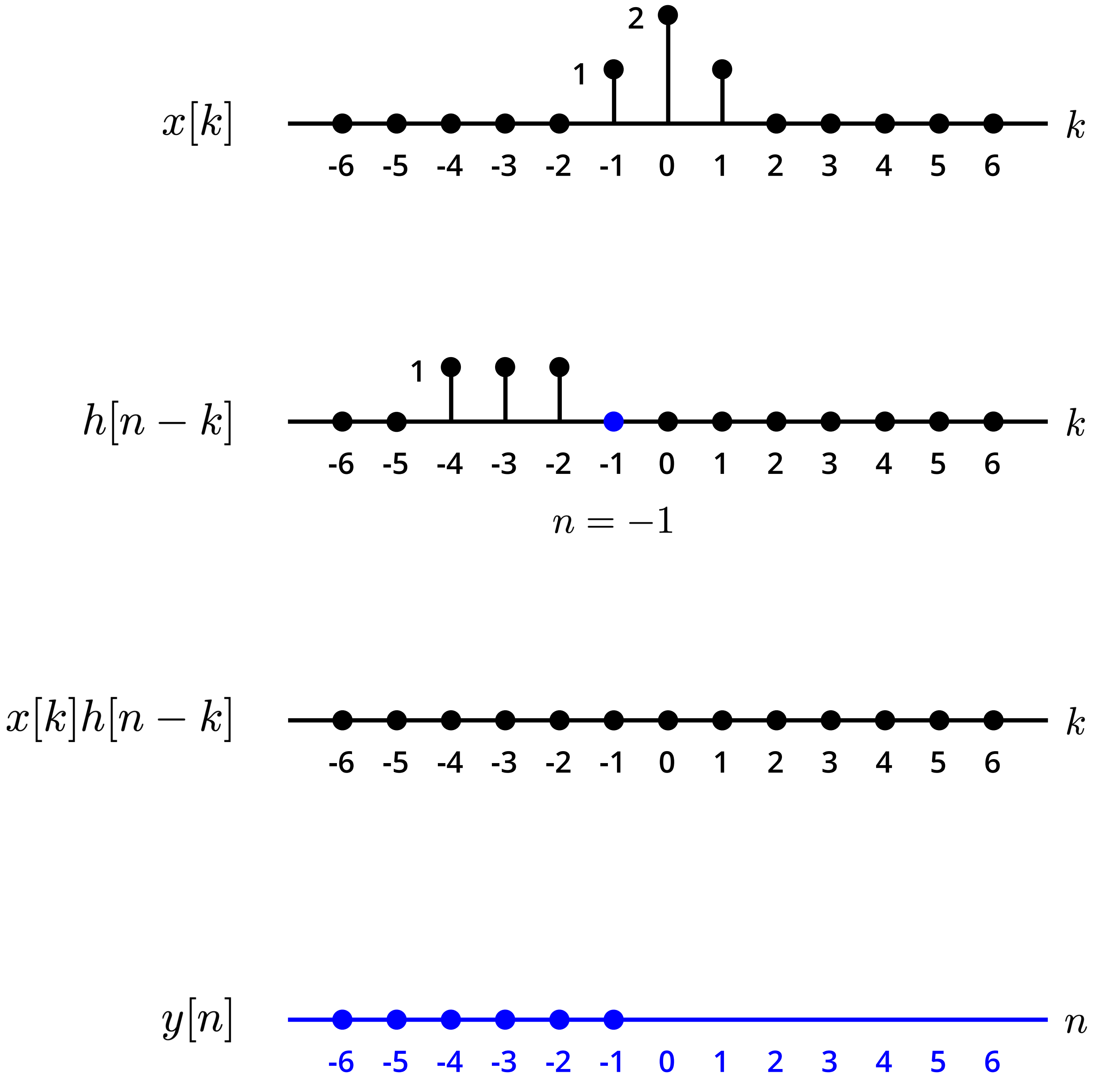
La convolución (discreta)



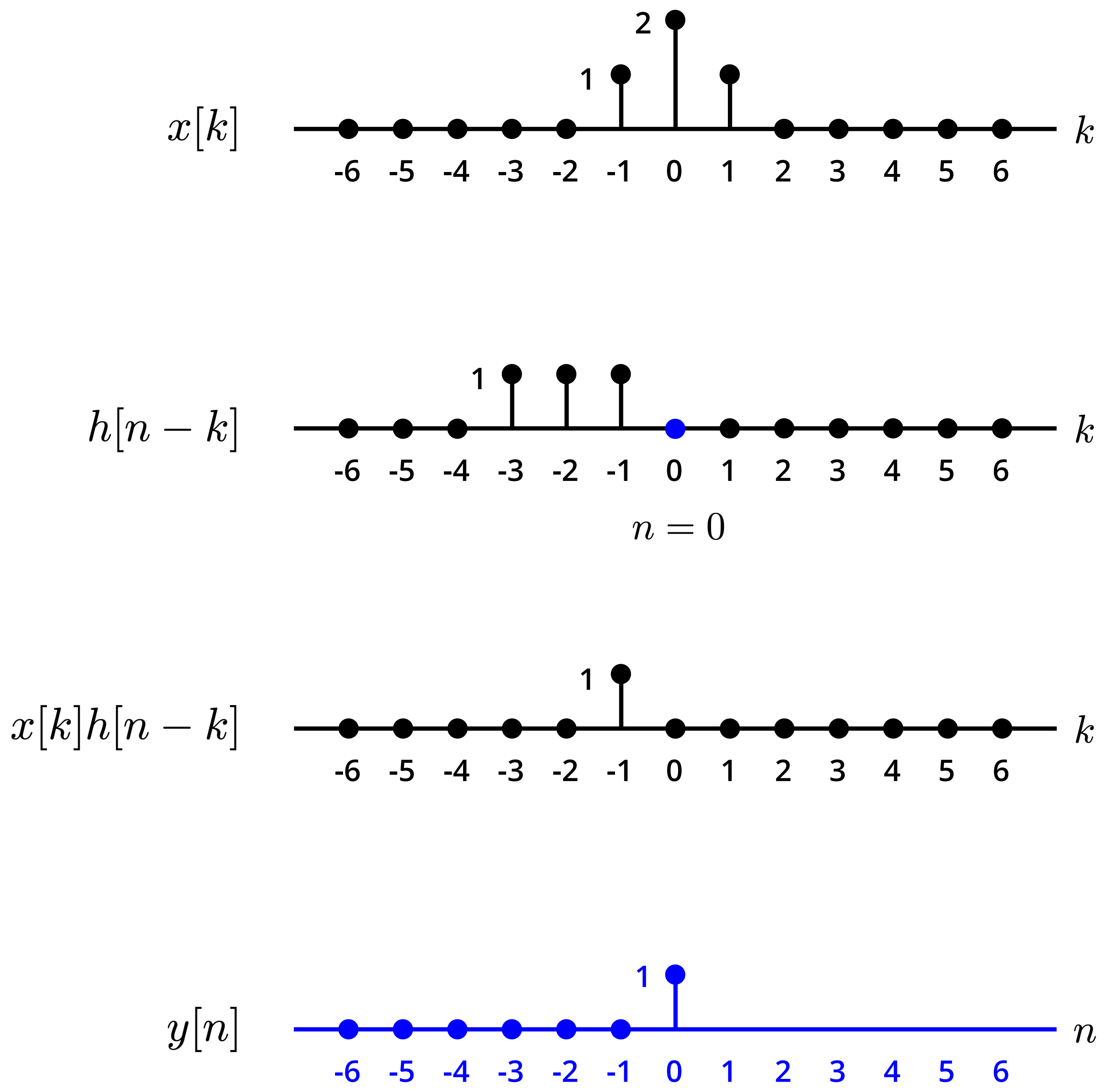
$$y[-2] = \sum_k x[k]h[-2-k] = 0$$



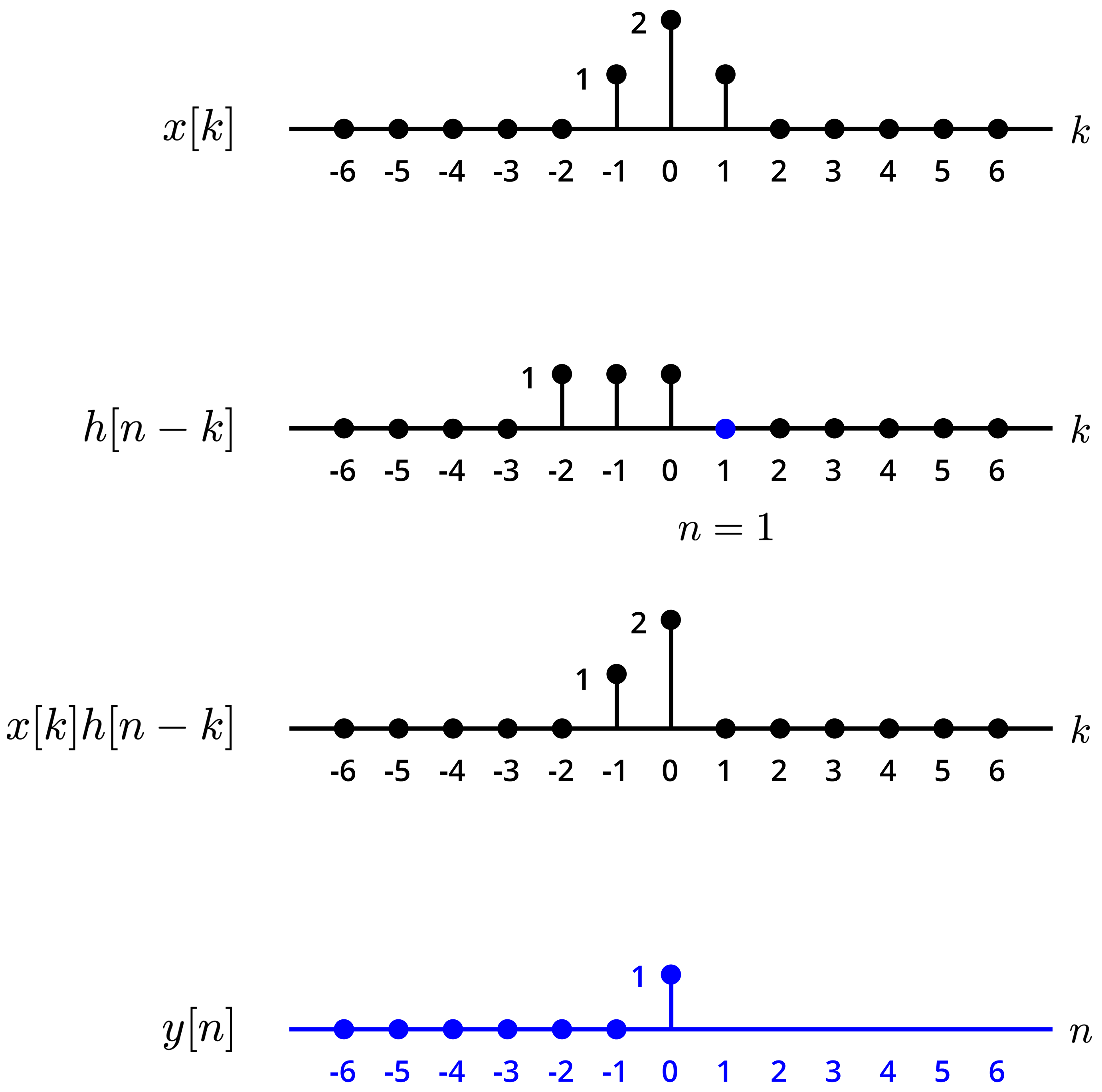
La convolución (discreta)



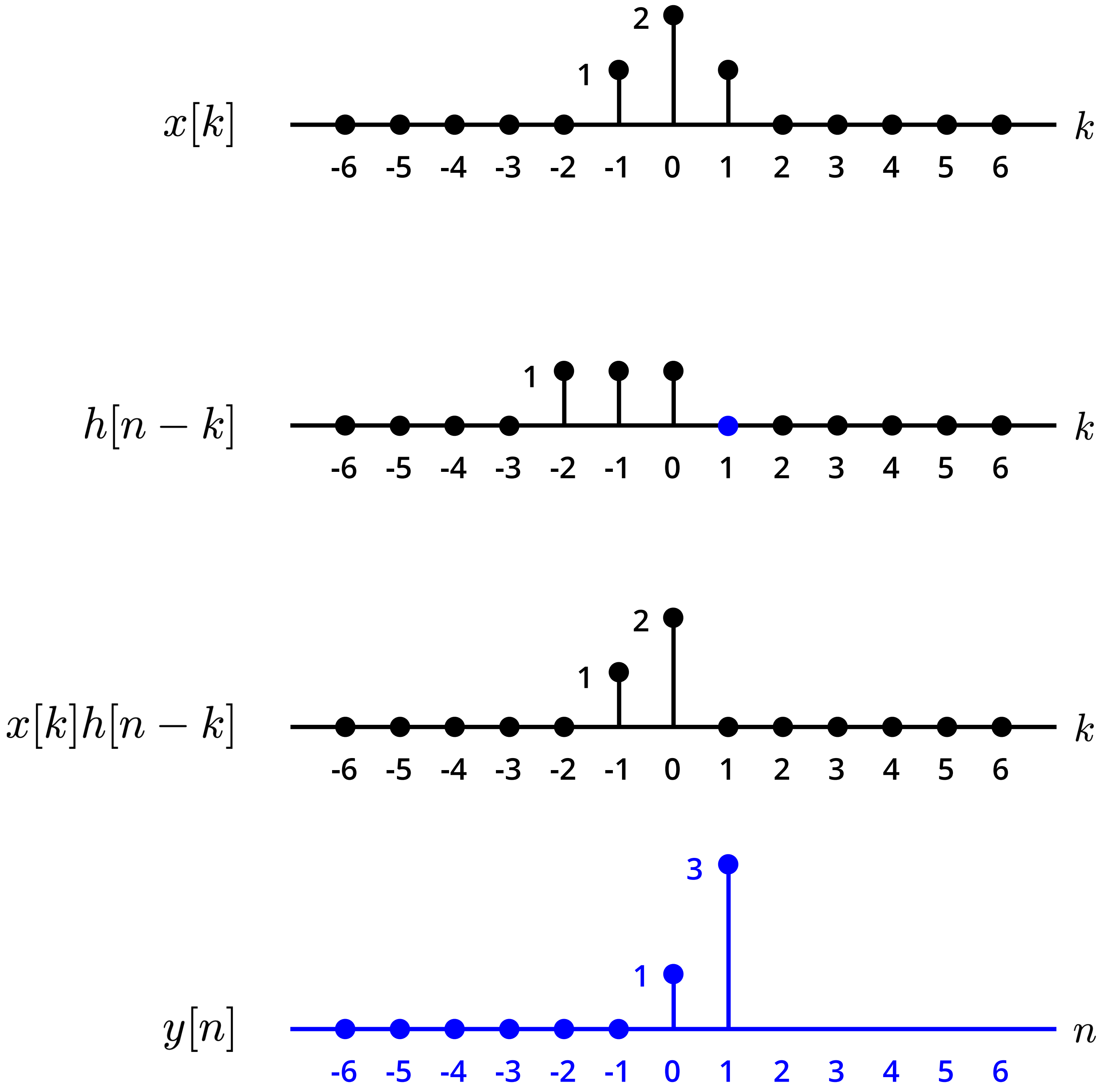
La convolución (discreta)



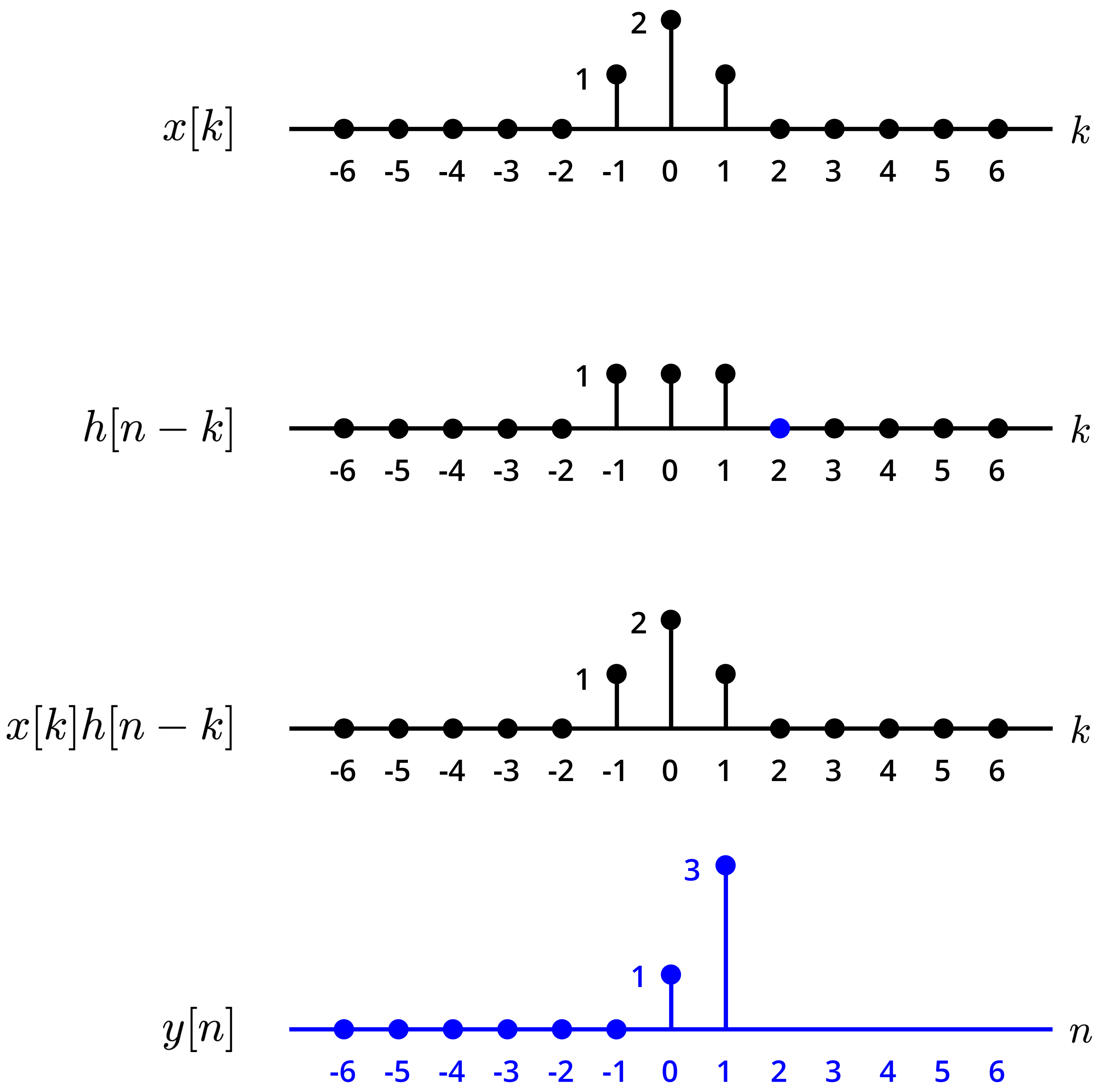
La convolución (discreta)



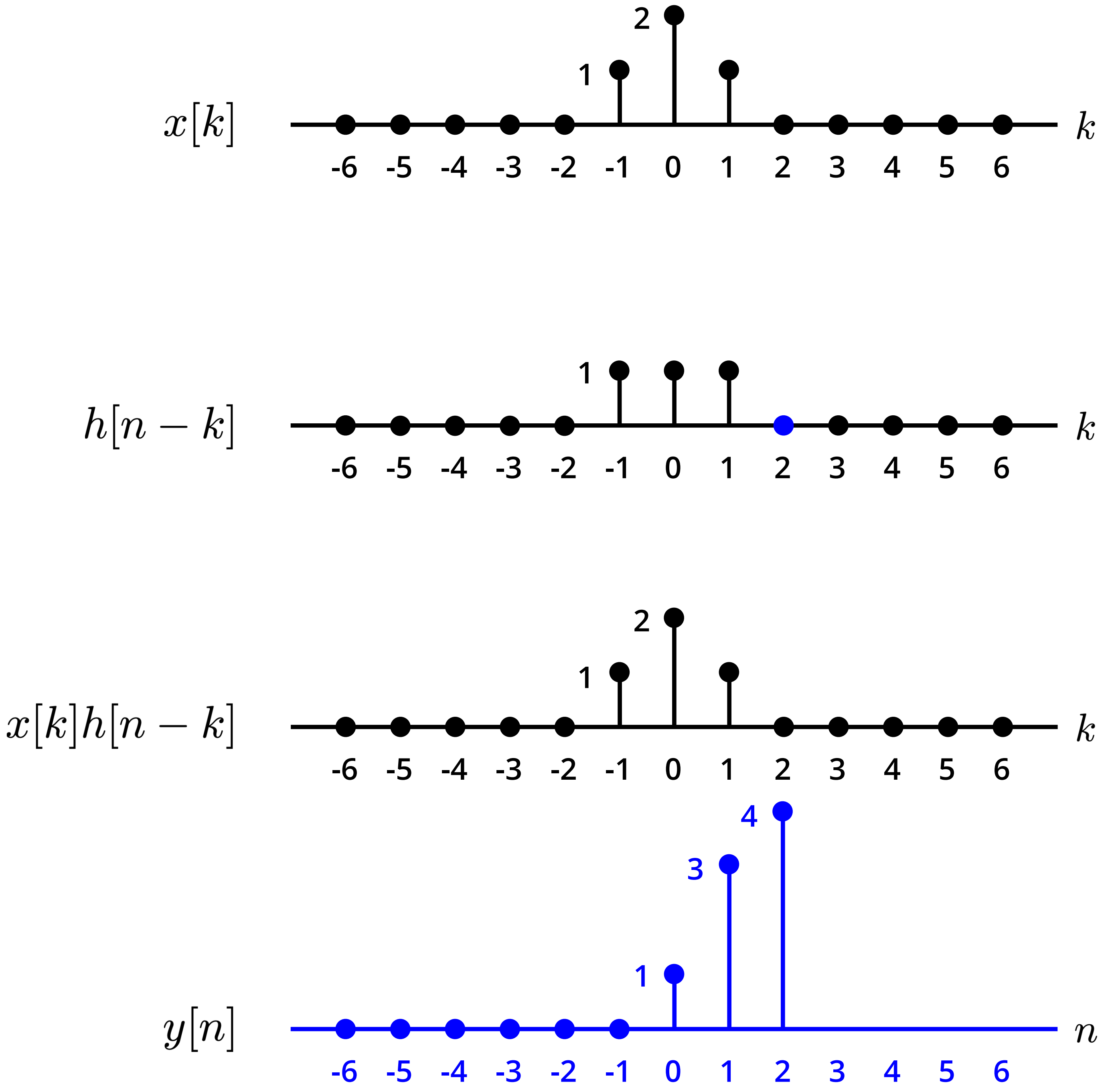
La convolución (discreta)



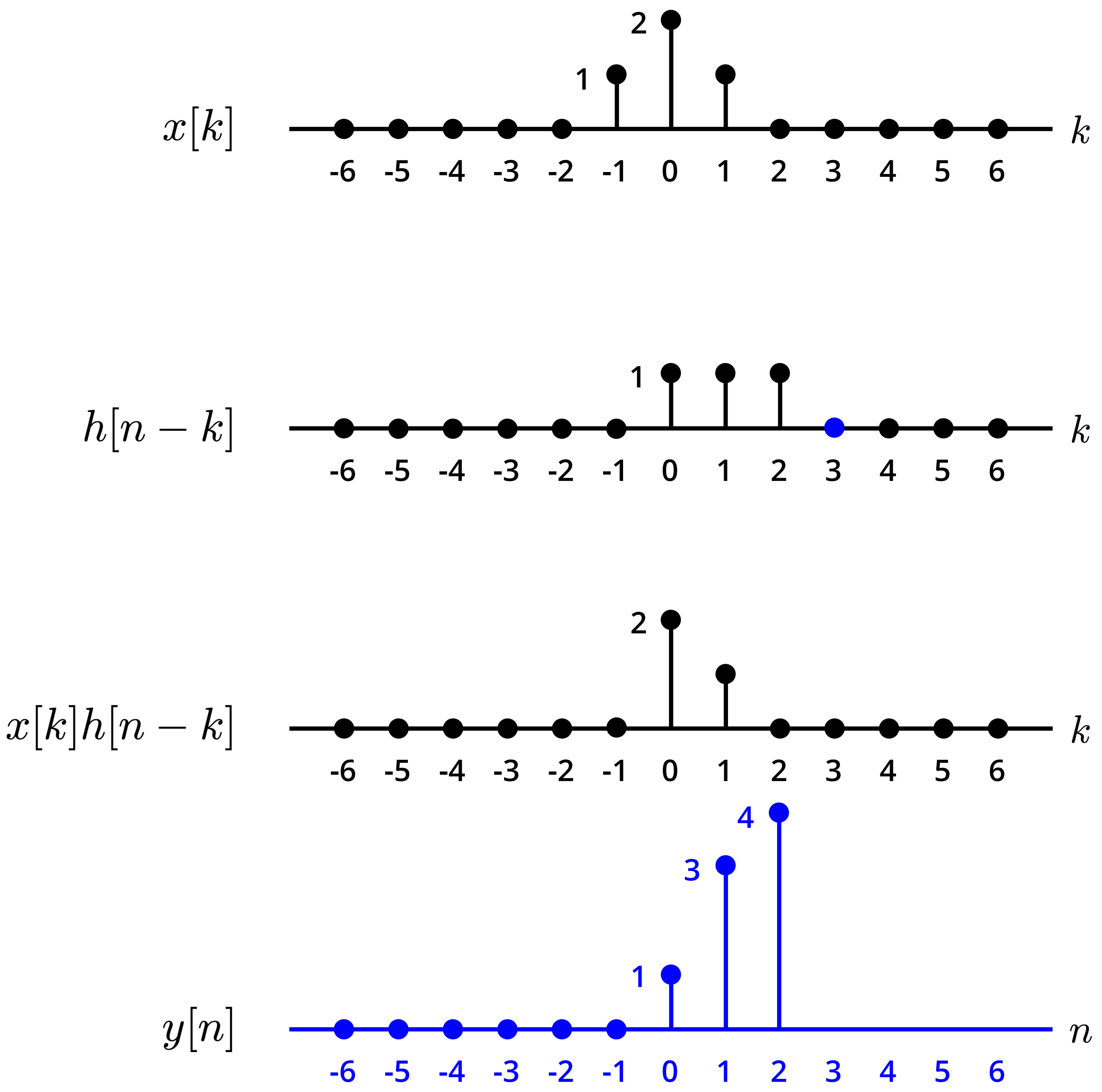
La convolución (discreta)



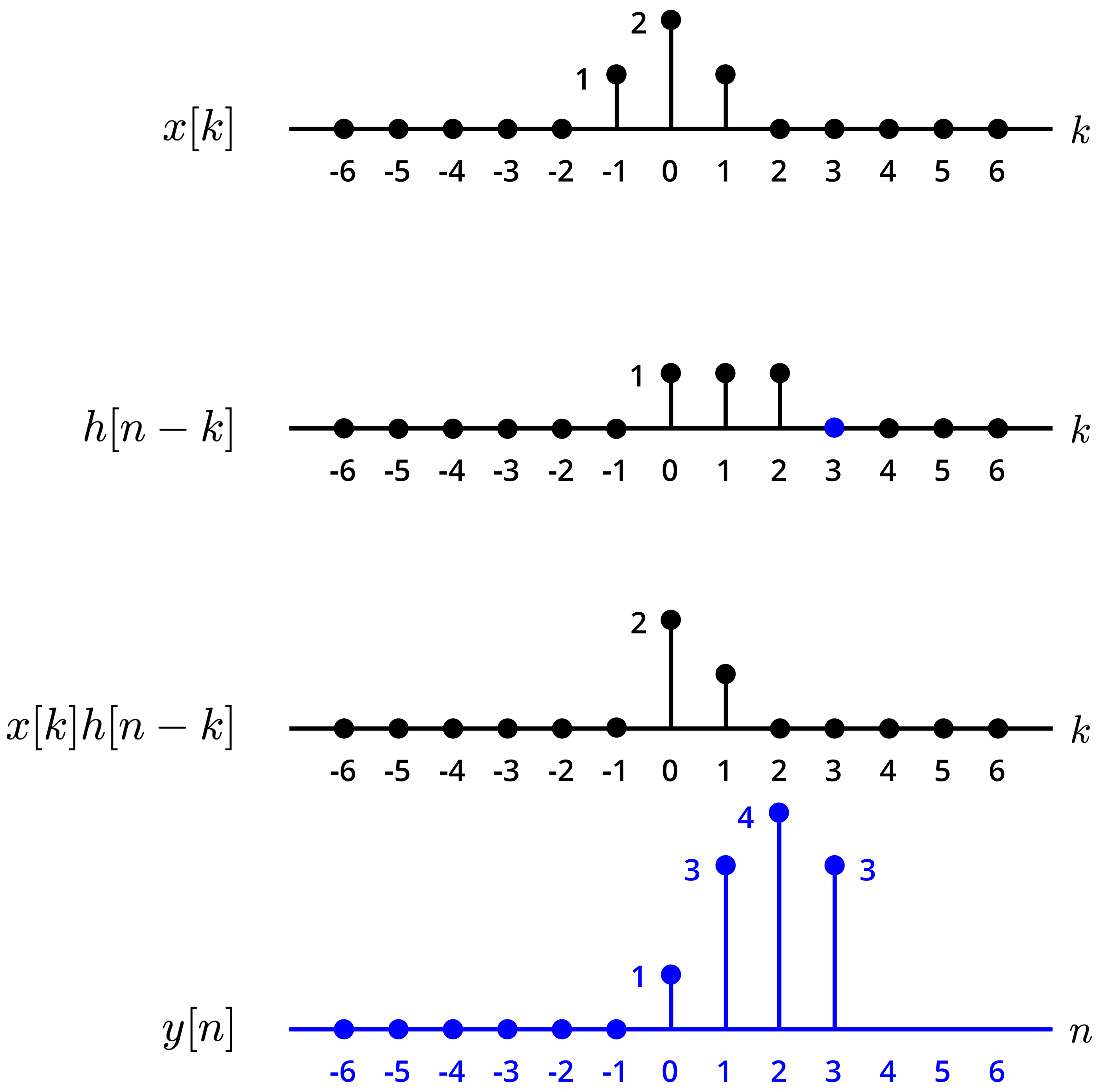
La convolución (discreta)



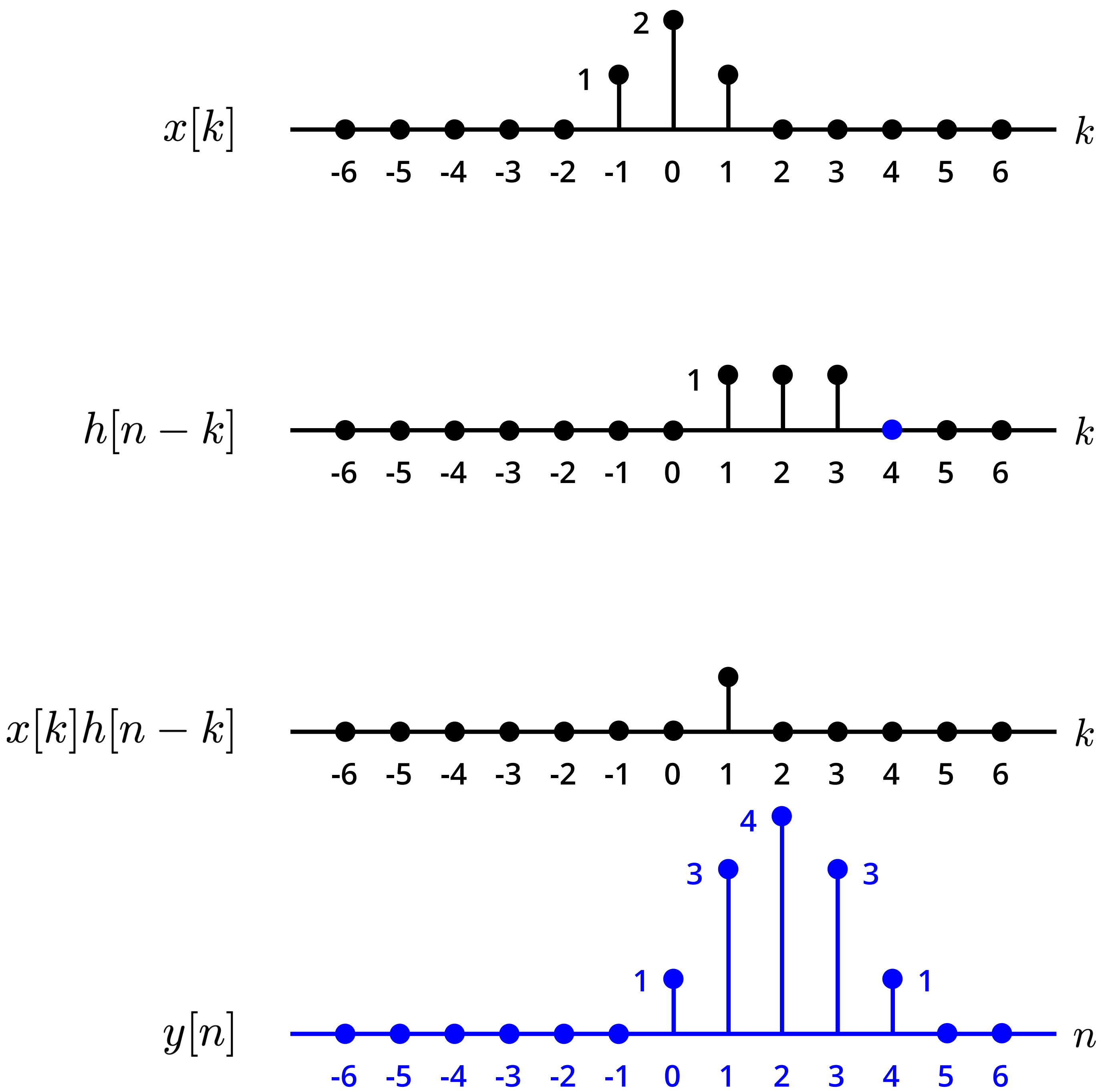
La convolución (discreta)



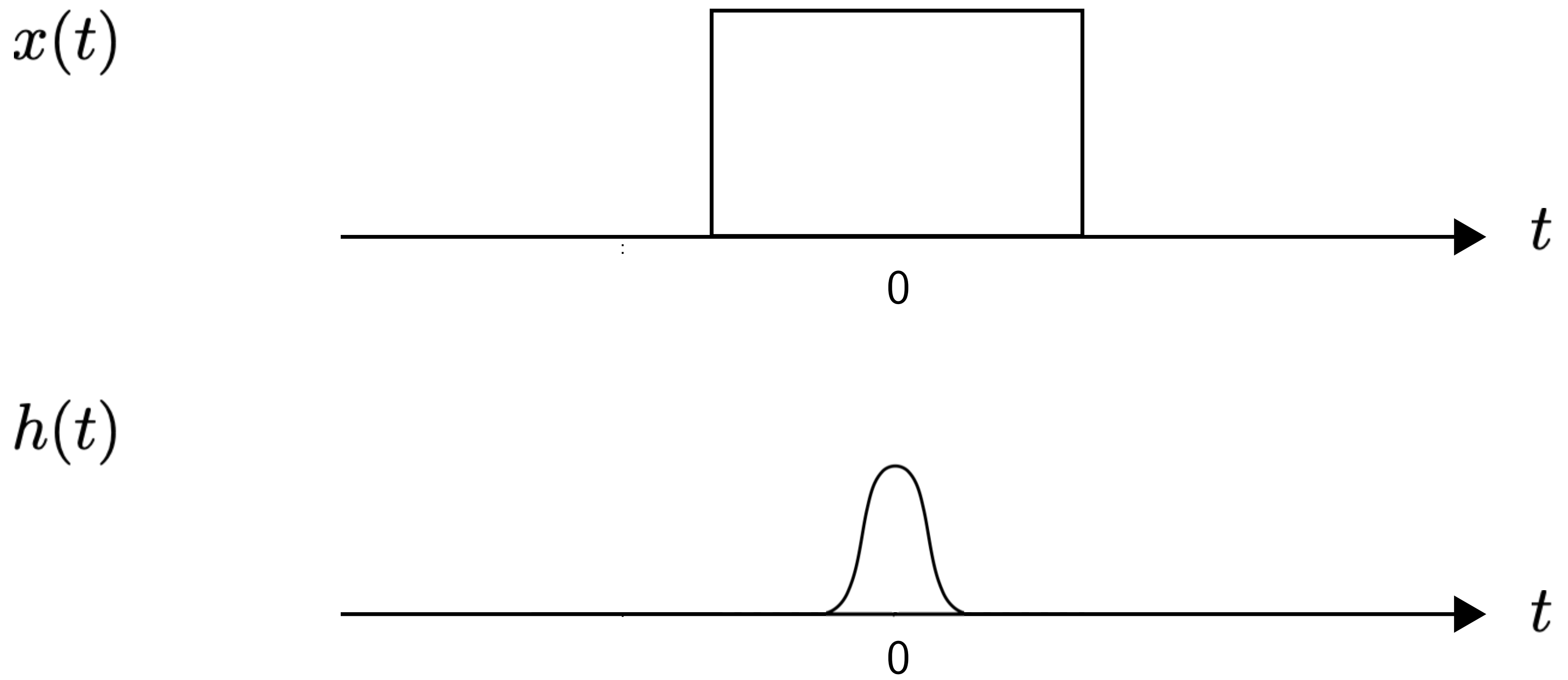
La convolución (discreta)



La convolución (discreta)

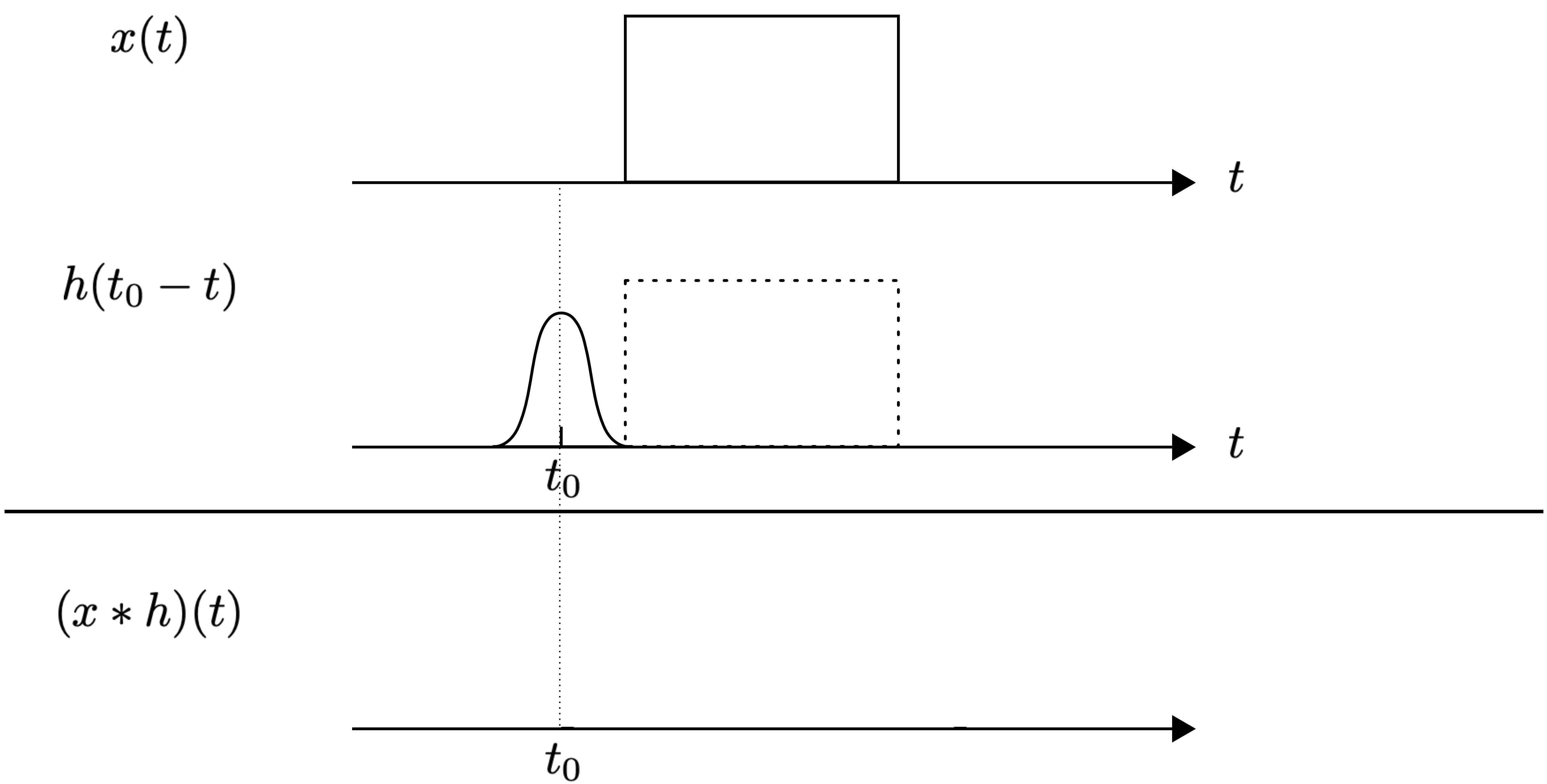


La convolución (continua)



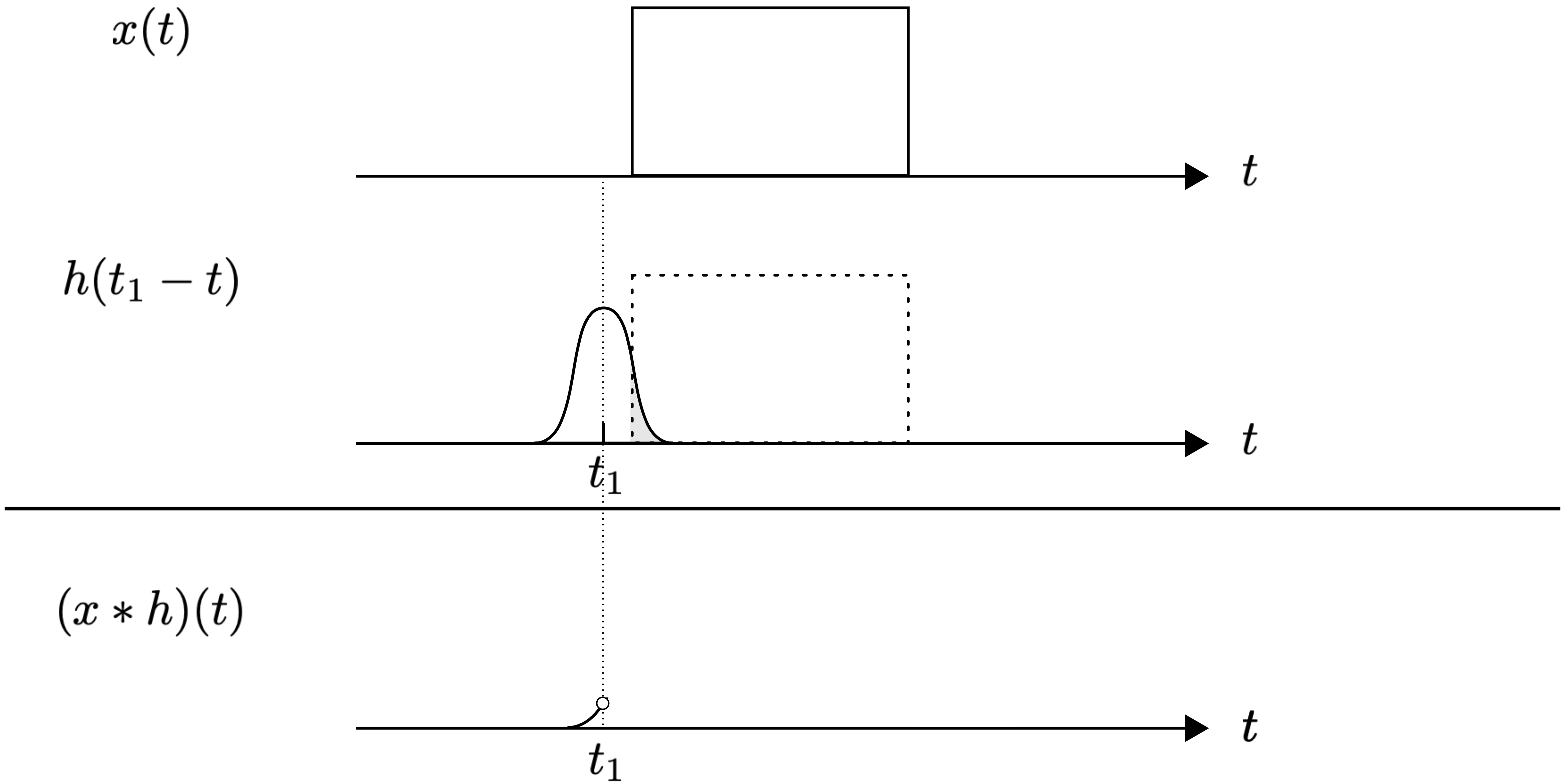
$$\text{“}x(t) * h(t)\text{”} = (x * h)(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

La convolución (continua)



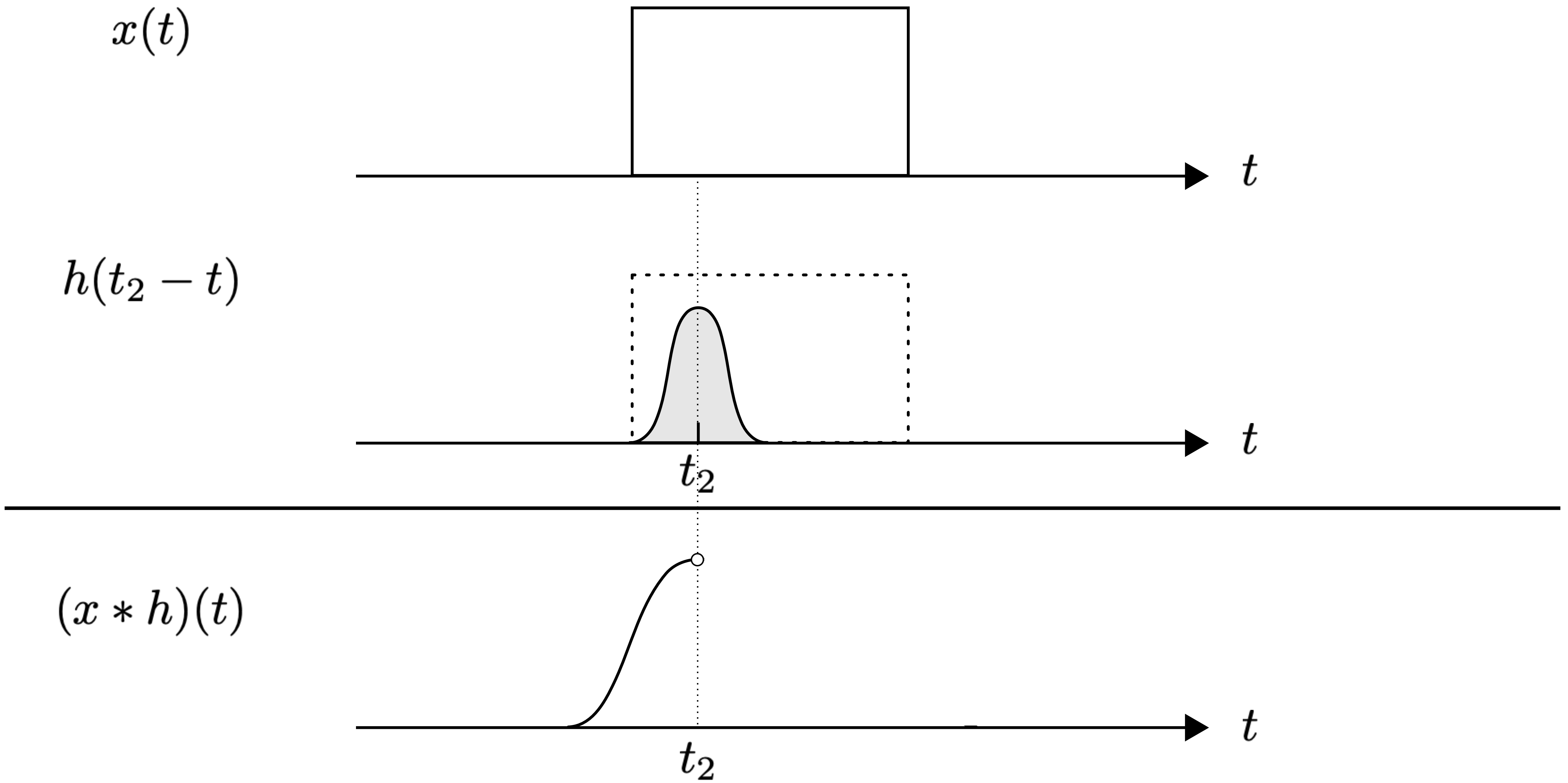
$$\text{“}x(t) * h(t)\text{”} = (x * h)(t) = \int_\tau x(\tau)\, h(t-\tau) d\tau$$

La convolución (continua)



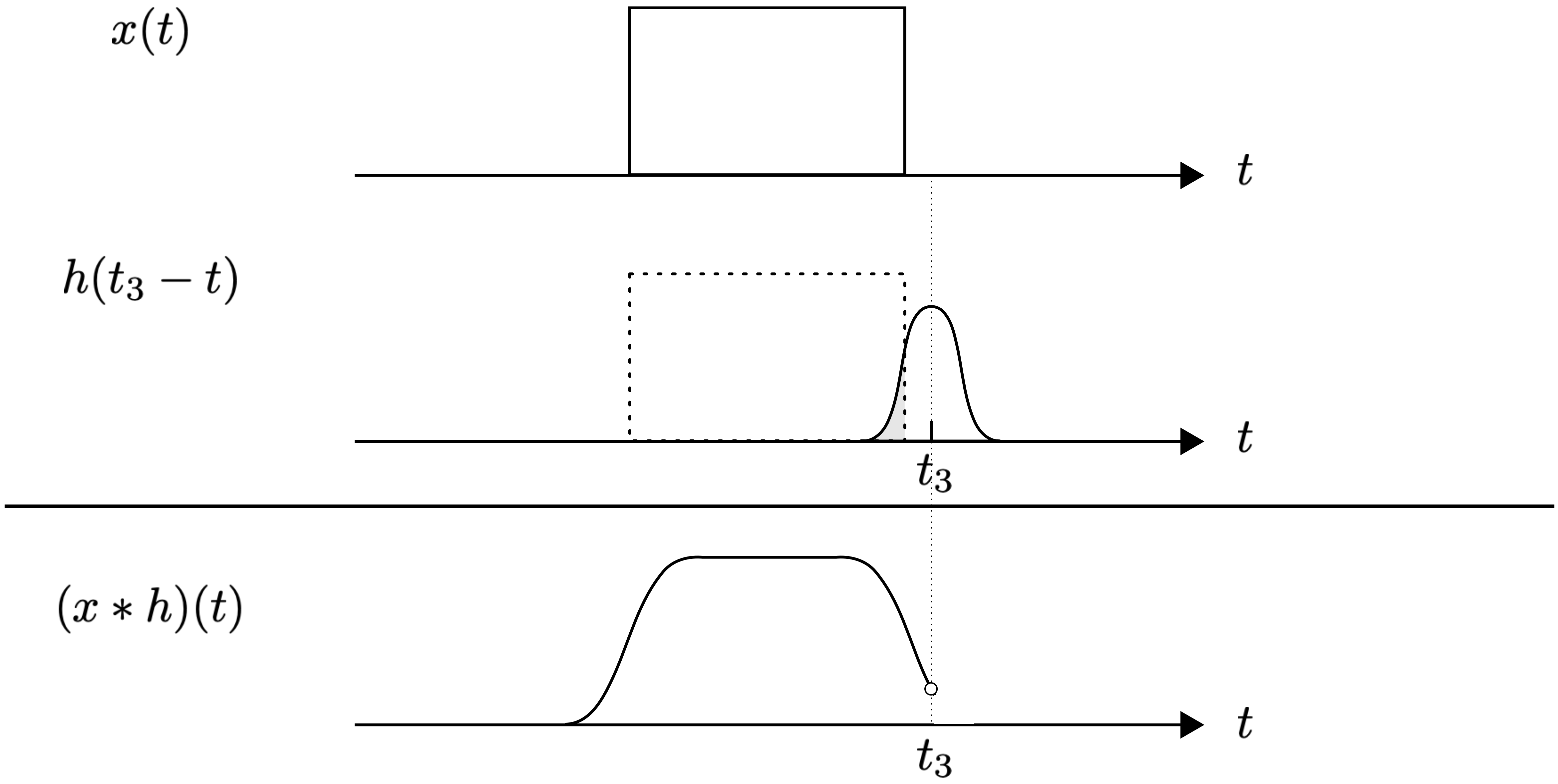
"$x(t) * h(t)$" $= (x * h)(t) = \int_\tau x(\tau)\, h(t - \tau) d\tau$

La convolución (continua)



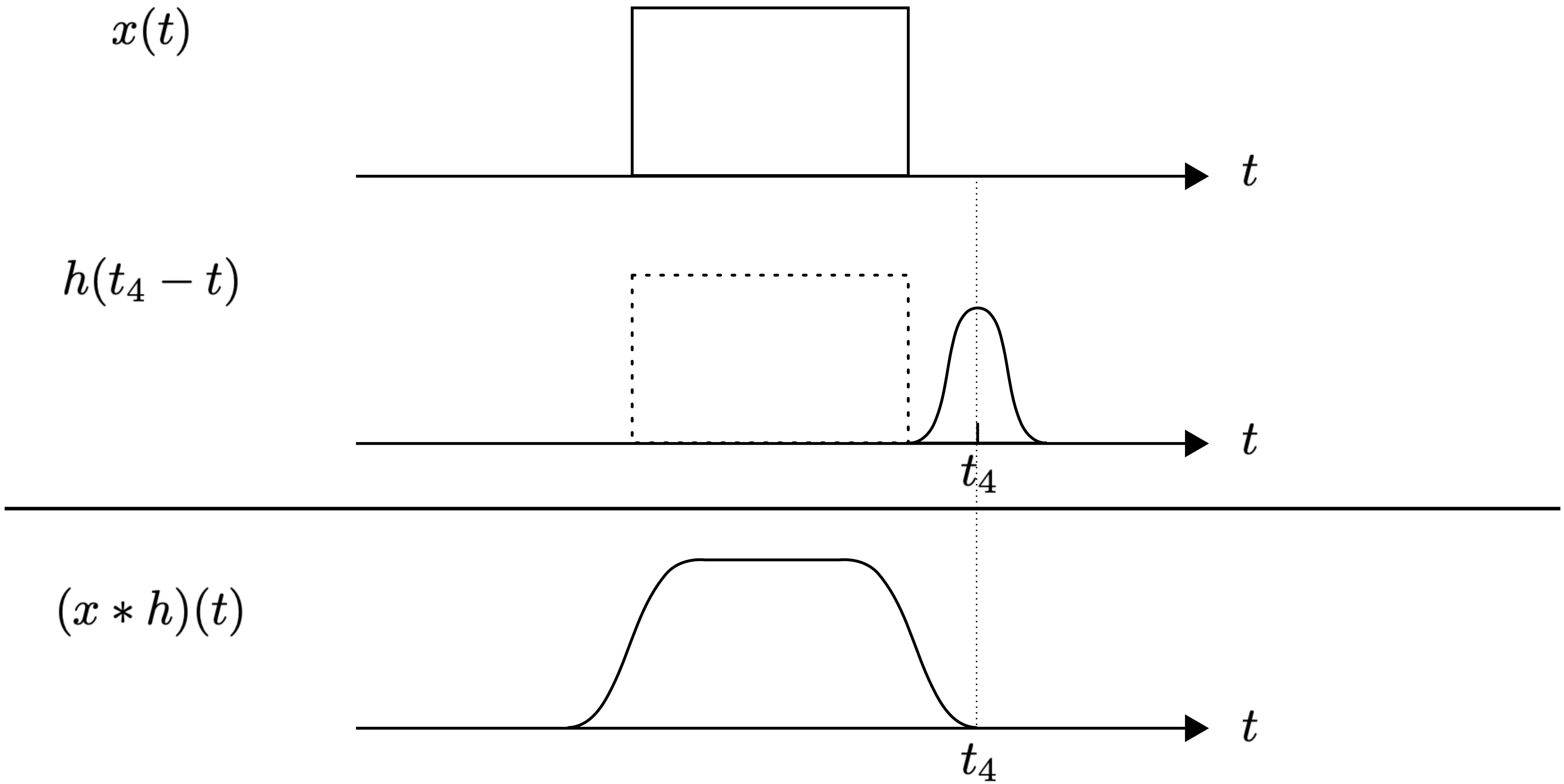
$$\text{“}x(t) * h(t)\text{”} = (x * h)(t) = \int_\tau x(\tau)\, h(t-\tau) d\tau$$

La convolución (continua)



$$\text{“}x(t) * h(t)\text{”} = (x * h)(t) = \int_\tau x(\tau)\, h(t - \tau) d\tau$$

La convolución (continua)



$$\text{“}x(t) * h(t)\text{”} = (x * h)(t) = \int_\tau x(\tau)\, h(t - \tau) d\tau$$

Ver ejemplo 2.7

Ejemplos

- Acumulador con interés

$$y[n] = (1+\alpha)y[n-1] + x[n]$$

$$h[n] = (1+\alpha)^n u[n]$$

$$\alpha = 0$$

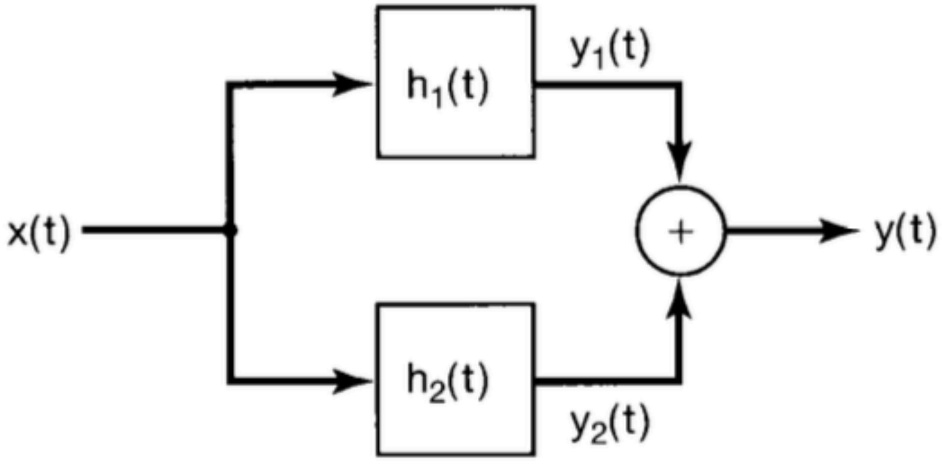
Propiedades de los SLITs

- Conmutativo

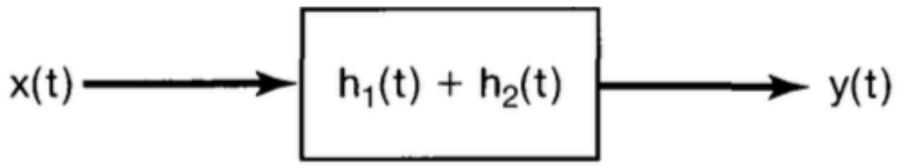
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- Distributiva

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$
$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



(a)



(b)

Propiedades de los SLITs

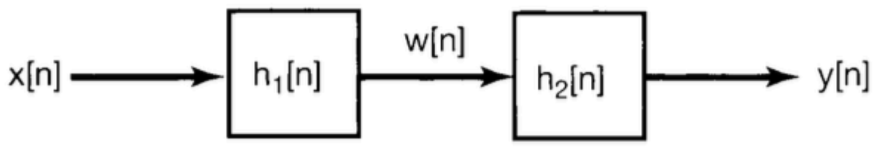
- Asociativa

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

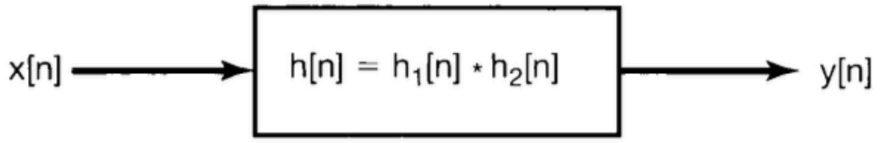
$x[n], h_1[n], h_2[n] = 0 \ \forall n < 0$

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

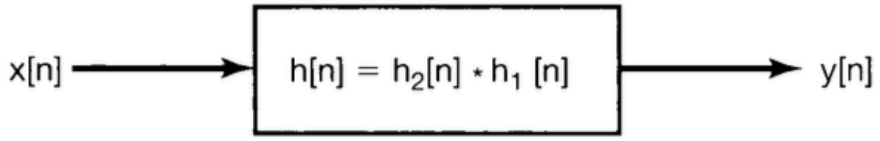
$x(t), h_1(t), h_2(t) = 0 \ \forall t < 0$



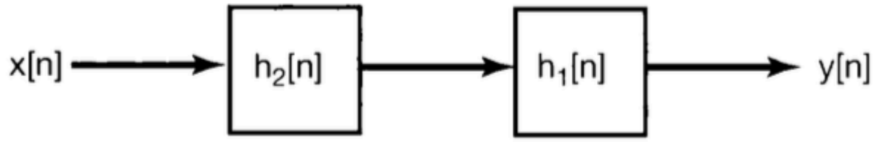
(a)



(b)



(c)



(d)

Propiedades de los SLITs

- Causalidad: la salida no depende de valores futuros de la entrada.
  - Un SLIT es causal sii

$$h[n] = 0 \;\; \forall n < 0 \qquad\qquad h(t) = 0 \;\; \forall t < 0$$

- Sin memoria: la salida solo depende de la entrada en el mismo tiempo.
  - Un SLIT no tiene memoria sii

$$h[n] = C\,\delta[n] \qquad\qquad h(t) = C\,\delta(t)$$

- Estabilidad BIBO: Para **toda** señal de entrada acotada la salida es acotada.
  - Un SLIT es BIBO estable sii

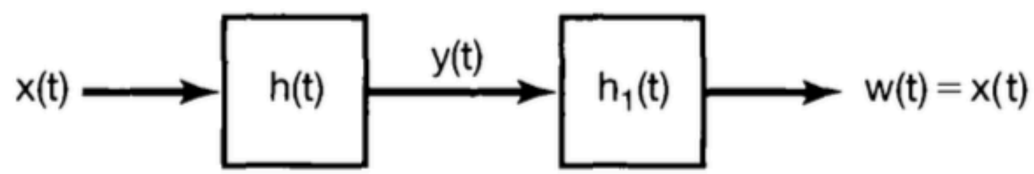
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \qquad\qquad \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Absolutamente sumable

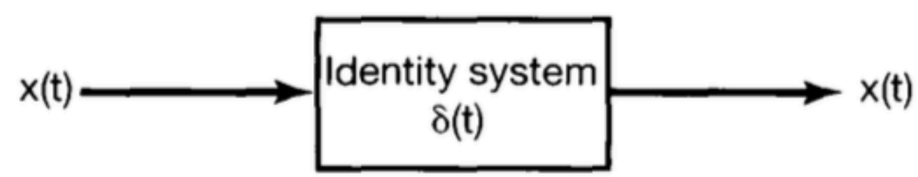
Absolutamente integrable

Propiedades de los SLITs

- Invertibilidad
$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$
$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$



(a)



(b)

- Respuesta al escalón
$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$
$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

Propiedades de los SLITs

- Neutro $$x[n] * \delta[n] = x[n]$$
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$
$$x[n] + 0[n] = x[n]$$
$$x(t) + 0(t) = x(t)$$

SLIT causales y ecuaciones diferencial/en diferencias

- En general escribimos un ecuaciones diferencial como

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

  - Un caso particular $$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

- La solución tiene dos partes: la *homogénea* y la *particular*, dadas *las* condiciones iniciales, por ejemplo:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \cdots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

- Es usual imponer condiciones iniciales nulas para algún tiempo t_0/n_0, partiendo del reposo.

SLIT causales y ecuaciones diferencial/en diferencias

- De manera similar tenemos las ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

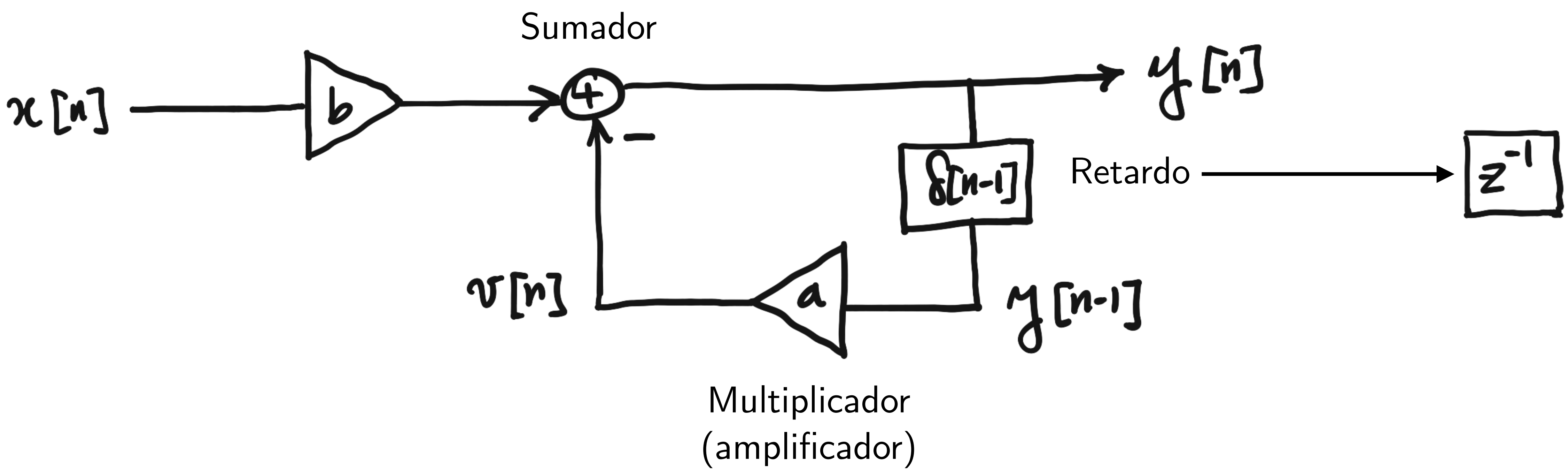
  - Nuevamente con una solución homogénea, y condiciones iniciales.
- En este caso es usual escribirlo como una ecuación *en recurrencia*

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\}$$

- Esto lo encontraremos nuevamente cuando veamos *Filtro Digitales* (FIR, IIR).

Representación de sistemas en diagramas de bloques

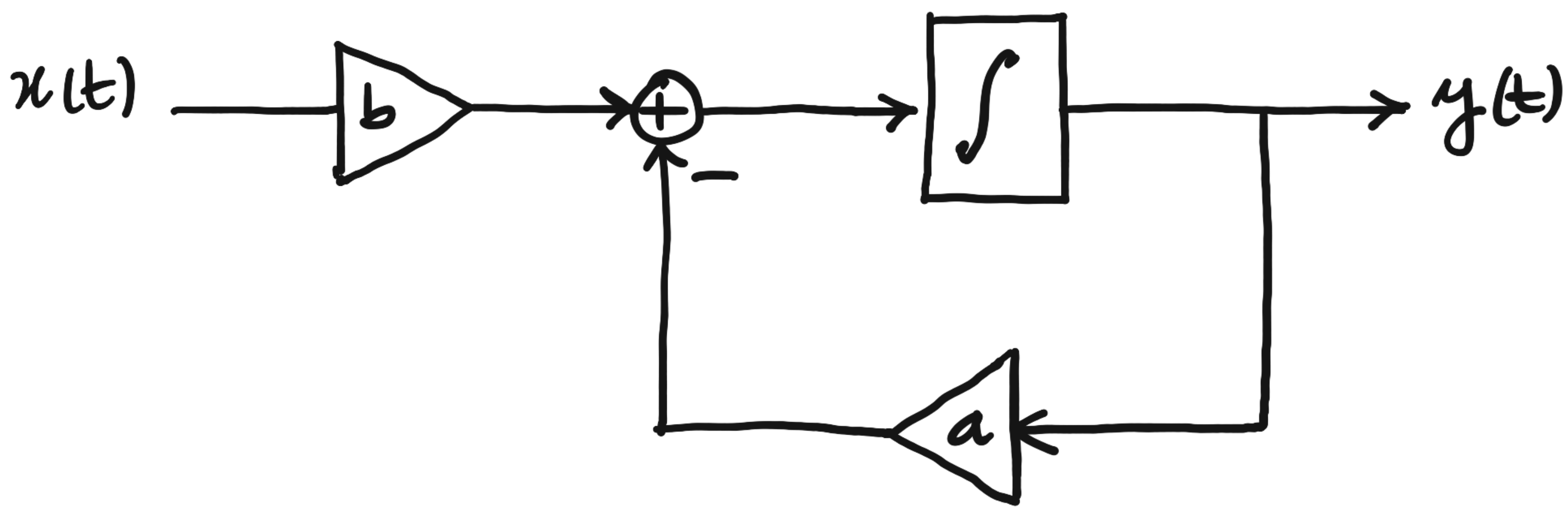
$$y[n] = -a\,y[n-1] + b\,x[n]$$



$$\left.\begin{aligned} y[n] &= b\,x[n] - v[n] \\ v[n] &= a\,y[n-1] \end{aligned}\right\} \quad y[n] = b\,x[n] - a\,y[n-1]$$

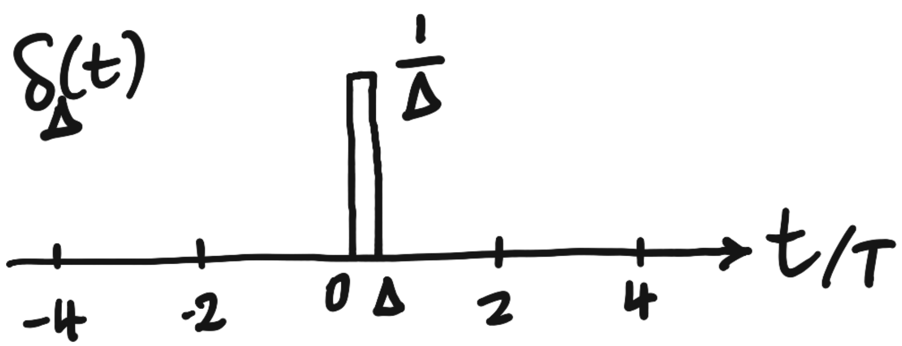
Representación de sistemas en diagramas de bloques

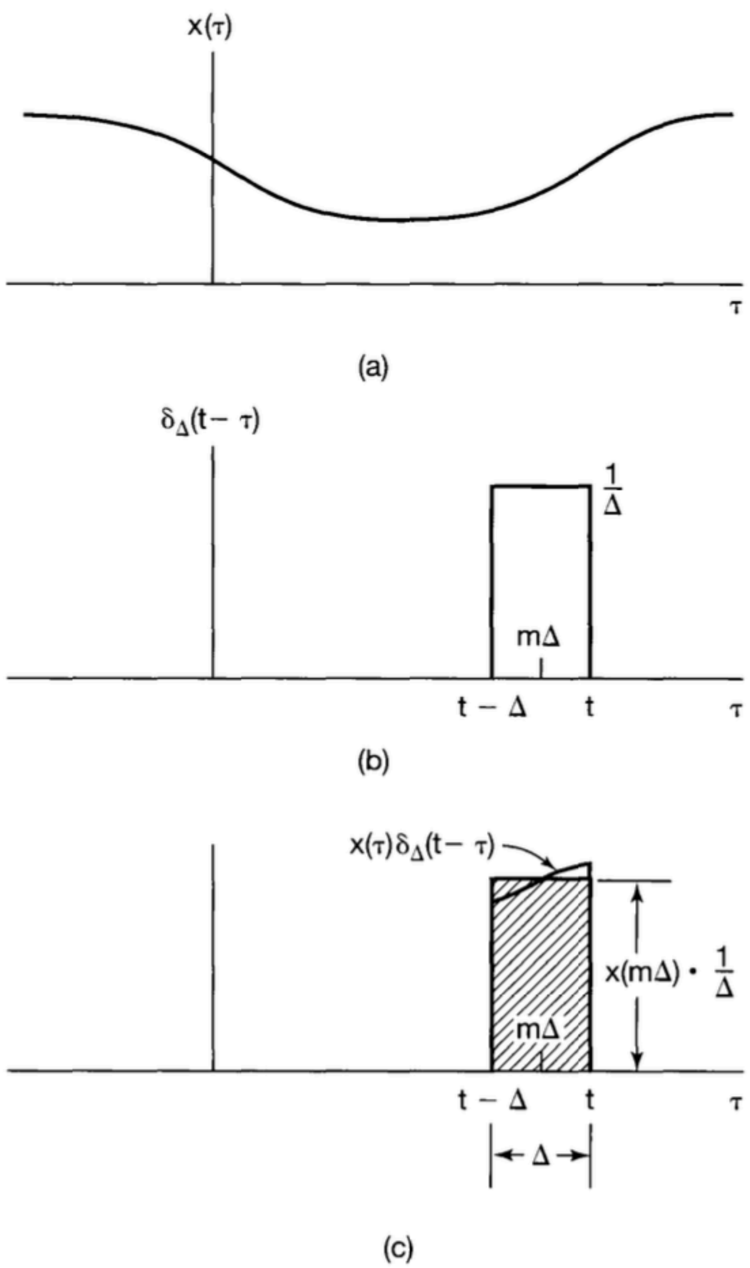
$$\frac{dy(t)}{dt} = -a\,y(t) + b\,x(t)$$



Funciones singulares

- $\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$



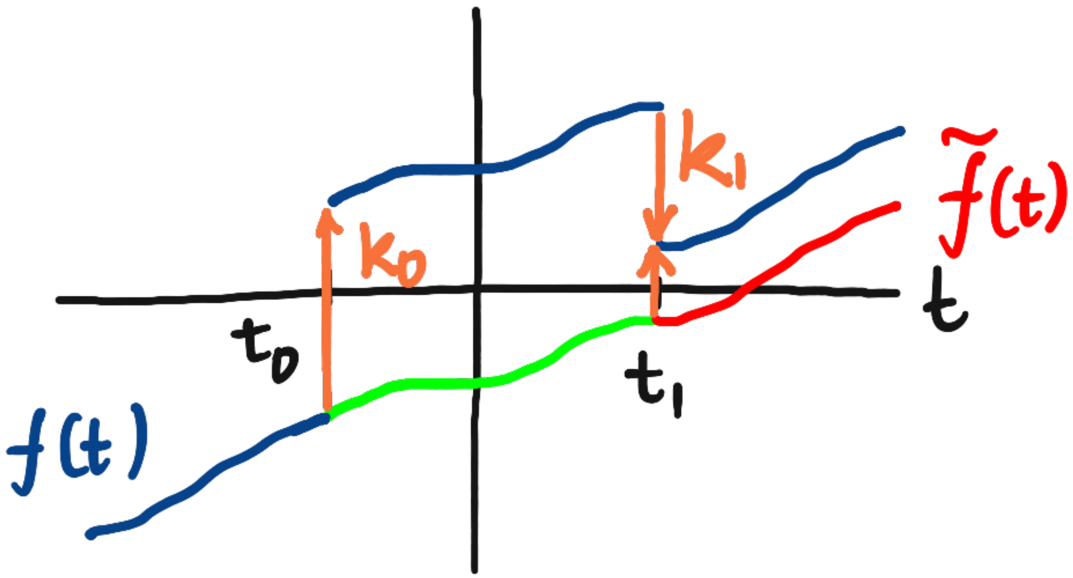


- $x(t) * \delta(t) = x(t)$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = x(t)$$

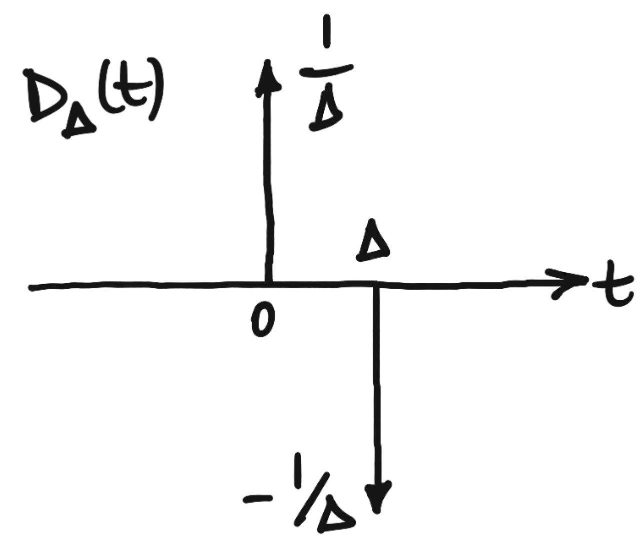
Funciones singulares



La delta nos permite modelar discontinuidades

$$f(t) = \tilde{f}(t) + K_0\, u(t - t_0) + K_1\, u(t - t_1)$$

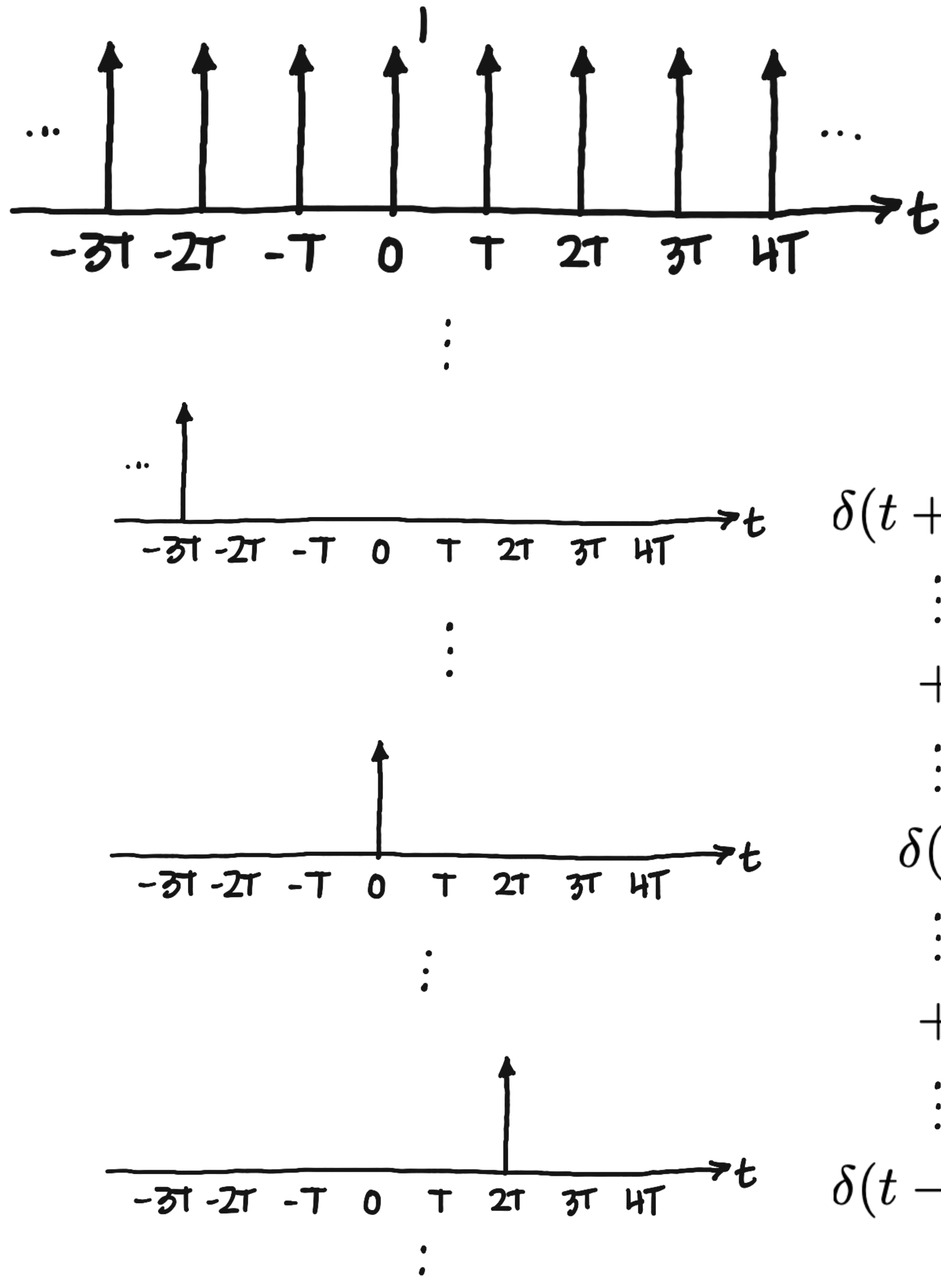
$$\delta(t) * \delta'(t) = \delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = u_1(t) \approx D_\Delta(t)$$



Funciones singulares

- Peine de Dirac

$$p(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$



$\delta(t+3T)$

$+$

$\delta(t)$

$+$

$\delta(t-2T)$