# Axioma de completitud

Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.


---

Ejemplo: $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

$n = 1 \rightsquigarrow 1 - \frac{1}{1} = 0$

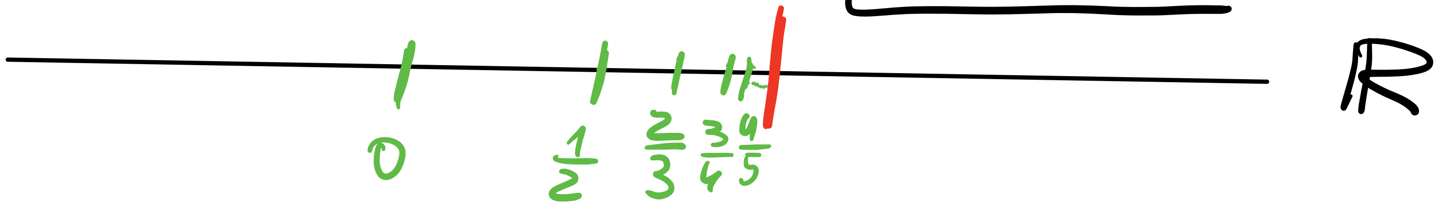
$n = 2 \rightsquigarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$n = 3 \rightsquigarrow 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\vdots$

" $A = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots \right\}$ "

$\alpha = \boxed{\sup(A) = 1}$




1 es una cota superior de $A$

Entonces, por el axioma de completitud

Existe $\alpha = \sup(A)$

De hecho, $\alpha = 1$,

Pero cómo podemos asegurarlo?

---

Propiedad fundamental del supremo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío. y sea $\alpha$ una cota superior de $A$.

Entonces $\alpha = \sup(A) \iff$

$$\forall \varepsilon > 0, \underbrace{\exists\, a_\varepsilon \in A \,/\, \alpha - \varepsilon < a_\varepsilon \leq \alpha}$$

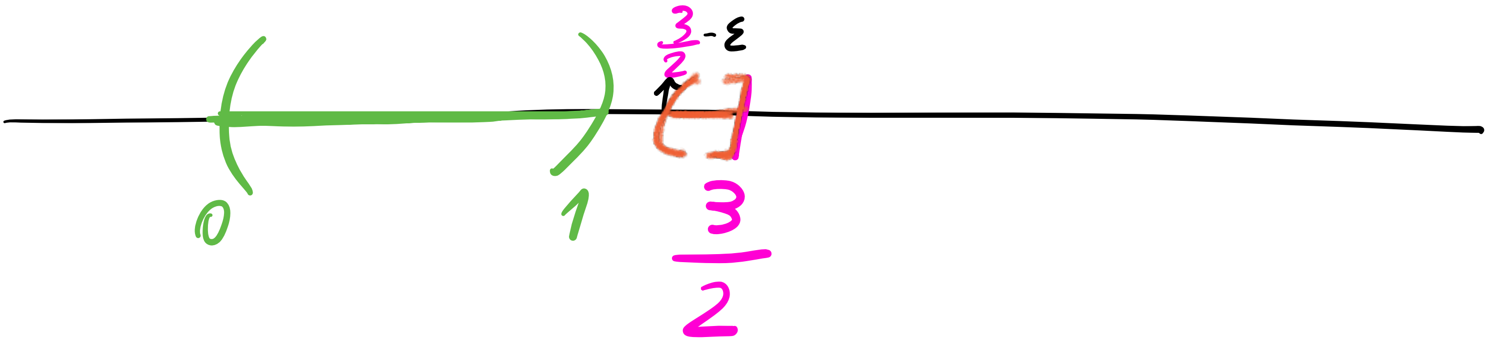
Se puede

$$A \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha] \neq \emptyset$$

escribir así

---

**Ejemplo:** $A = (0,1)$, $\sup(A) = 1$




$\frac{3}{2}$ es una cota superior de $A$ pero no es el supremo de $A$ ya que el $\varepsilon$ usado en el dibujo deja en evidencia que $\left(\frac{3}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}\right] \cap (0,1) = \emptyset$, lo que contradice la caracterización del supremo enunciada arriba.

---

Demostración de la prop. fund. del supremo.

$(\Rightarrow)$ Supongamos que no se cumple que

$\forall \varepsilon > 0 \quad ( \quad ] \cap A \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0, \ [\alpha - \varepsilon, \alpha] \cap A \neq \emptyset$

Entonces, $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ /$

$$(\alpha - \varepsilon_0, \alpha] \cap A = \emptyset \quad \Big] *$$

Por otro lado, como $\alpha$ es una cota superior de $A$ tenemos que

$$A \cap (\alpha, +\infty) = \emptyset \quad ] *$$


Entonces

$$A \cap \big( (\alpha - \varepsilon_0, \alpha] \cup (\alpha, +\infty) \big) = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cap (\alpha - \varepsilon_0, +\infty) = \emptyset$$

lo que implica que $\alpha - \varepsilon_0$ es cota superior de $A$, entonces $\alpha$ no es la menor cota superior de $A$ $\Rightarrow \alpha \neq \sup(A)$

---

Veamos ahora la prueba de la vuelta por contra-recíproco.

Supongamos que $\alpha \neq \sup(A)$ y veremos que $\exists \varepsilon > 0 / (\alpha - \varepsilon, \alpha] \cap A = \emptyset$.

Como $\alpha \neq \sup(A)$

Entonces existe $\alpha' < \alpha$

otra cota superior de $A$.

Podemos escribir

$$\alpha' = \alpha - \underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\varepsilon} = \alpha - \varepsilon$$

Como $\alpha'$ es una cota superior de $A$

Se tiene que $(\alpha', +\infty) \cap A = \emptyset$

y entonces, en particular

$$(\alpha', \alpha] \cap A = \emptyset$$

$$\Rightarrow (\alpha - \varepsilon, \alpha] \cap A = \emptyset$$

Por lo que $\exists\ \varepsilon > 0 /\ A \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha] = \emptyset$

lo que es, la negación de nuestra hipótesis.

$\blacksquare$

---

Veamos ahora que existe

$$x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 = 2$$

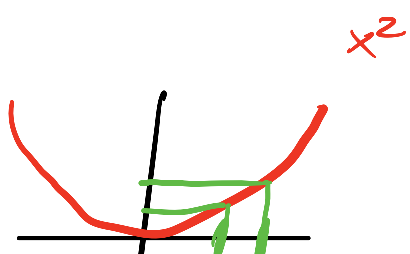
(En otras palabras veamos que "$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$")

Consideremos

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 < 2 \}$$

Observar que $1^2 = 1 < 2$

$$\Rightarrow \boxed{1 \in A} \Rightarrow A \neq \emptyset$$




Por otro lado

Por otro lado,

Si $x > 2 \underset{\text{elevando al cuadrado}}{\Longrightarrow} x^2 > 2^2 = 4 > 2 \Rightarrow x^2 > 2$

Entonces $(2, +\infty) \cap A = \emptyset \Rightarrow \boxed{2 \text{ es cota superior de } A}$

Entonces, por el axioma de completitud $\exists\ \alpha = \sup(A)$.

Queremos ver que $\alpha^2 = 2$

Para esto, observar que hay 3 posibilidades:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 < 2 \\ \alpha^2 = 2 \\ \alpha^2 > 2 \end{array}\right]$$

"Vamos a descartar" la primera y tercera opción

Supongamos que $\alpha < 2$. Entonces, "haciendo cuentas" podemos ver que $\exists\, \delta > 0$ (bien chico) de forma que $(\alpha+\delta)^2 < 2$ entonces, $\alpha + \delta \in A \Rightarrow$ $\alpha$ no es cota superior. Lo que es absurdo. Entonces $\alpha^2$ no puede ser menor a 2

---

También puede verse que si $\alpha^2 > 2$, entonces, $\exists\, \alpha' < \alpha$ que también es cota superior de $A$, contradiciendo que $\alpha$ es la menor de las cotas superiores. Entonces la única opción que nos fuerza es que $\alpha^2 = 2$.