Número real

CDIVU

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

El conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

El conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Con los enteros podemos resolver

$$x + 3 = 2 \iff (x+3) + (-3) = (2) + (-3)$$

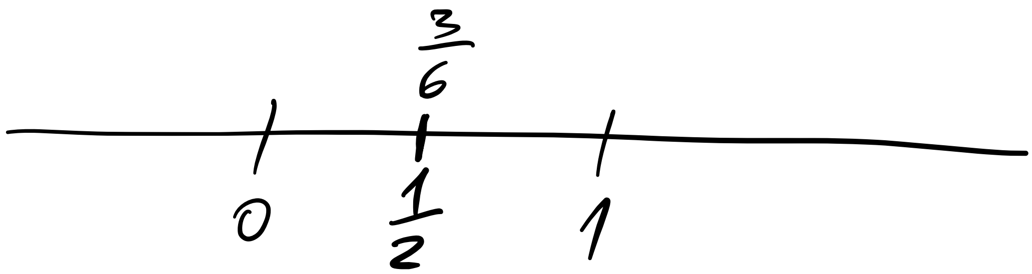
$$\iff x = -1$$

El conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

un mismo número racional admite muchas representaciones, por ejemplo

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$



$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd} \\[2ex] \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd} \end{cases}$$

inverso de $\left(\frac{a}{b}\right)$

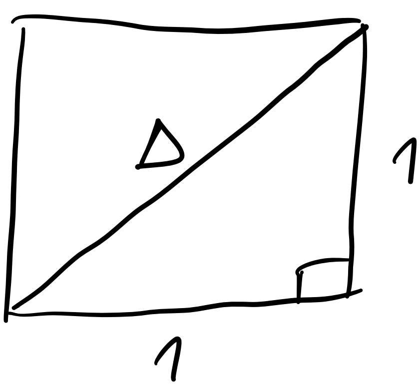
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}\right)$$

$\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales

Nos permite resolver $x^2 = 2$

$\iff x = \pm\sqrt{2}$



$$\Delta^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\Delta^2 = 2$$

Teorema: No existe ningún número racional que elevado al cuadrado de 2.

Recordamos: - $p \in \mathbb{Z}$ es par si puede escribirse como
$$p = 2 \cdot p' \text{ donde } p' \in \mathbb{Z}$$
- Si p no es par $\Rightarrow$ decimos que es impar y puede escribirse como
$$p = 2 \cdot p' + 1 \text{ con } p' \in \mathbb{Z}$$

$A \Rightarrow B$

contra recíproco

$\text{NO } B \Rightarrow \text{NO } A$

Lema 1: Si $p \in \mathbb{Z}$

$$p^2 \text{ es par} \Longleftrightarrow p \text{ es par}$$

$(\Rightarrow)$ Lo probaremos por el contrarrecíproco

Supongamos entonces que p es impar

entonces $p = 2 \cdot p' + 1$ con $p' \in \mathbb{Z}$

entonces

$$p^2 = (2p'+1)^2 = 4(p')^2 + 1 + 4p' =$$

$$= 4\left((p')^2 + p'\right) + 1 =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\left(2(p')^2 + 2p'\right)}_{\mathbb{Z}} + 1 \Rightarrow \boxed{p^2 \text{ es impar}}$$

<u>Lema 2</u>: Todo número racional puede representarse como $\frac{p}{q}$ donde p y q no son <u>ambos</u> pares

<u>Ej</u>: $\frac{4}{20} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot 10} = \frac{2}{10} = \frac{\cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 5} = \boxed{\frac{1}{5}}$

V

Veamos la prueba de que no existe $X \in \mathbb{Q}$ que cumple

$$x^2 = 2 :$$

Dem: Supongamos que existe $X \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 = 2$

Por el lema 2,

$X = \frac{p}{q}$ donde p y q son enteros que no son ambos pares.

$$2 = x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{2 \cdot q^2 = p^2} \quad (*)$$

entonces p^2 es par $\underset{\text{Lema } 1}{\Longrightarrow}$ p es par

Entonces $p = 2.(p')$ con $p' \in \mathbb{Z}$

Sustituimos en $(*)$:

$$2.q^2 = (2p')^2 = 4(p')^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2(p')^2 \Rightarrow q^2 \text{ es par}$$

$$\underset{\text{Lema 1}}{\Rightarrow} q \text{ es par}$$

Esto es una contradicción porque p y q no son simultaneamente pares.

Entonces, nuestra suposición original era falsa, por lo que $\nexists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 = 2$

Representaciones decimales de los números reales

Podemos pensar que los números reales son los "números con coma"

es decir: Si X es real positivo

$$X = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \dots\dots$$

$$= a_0 + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

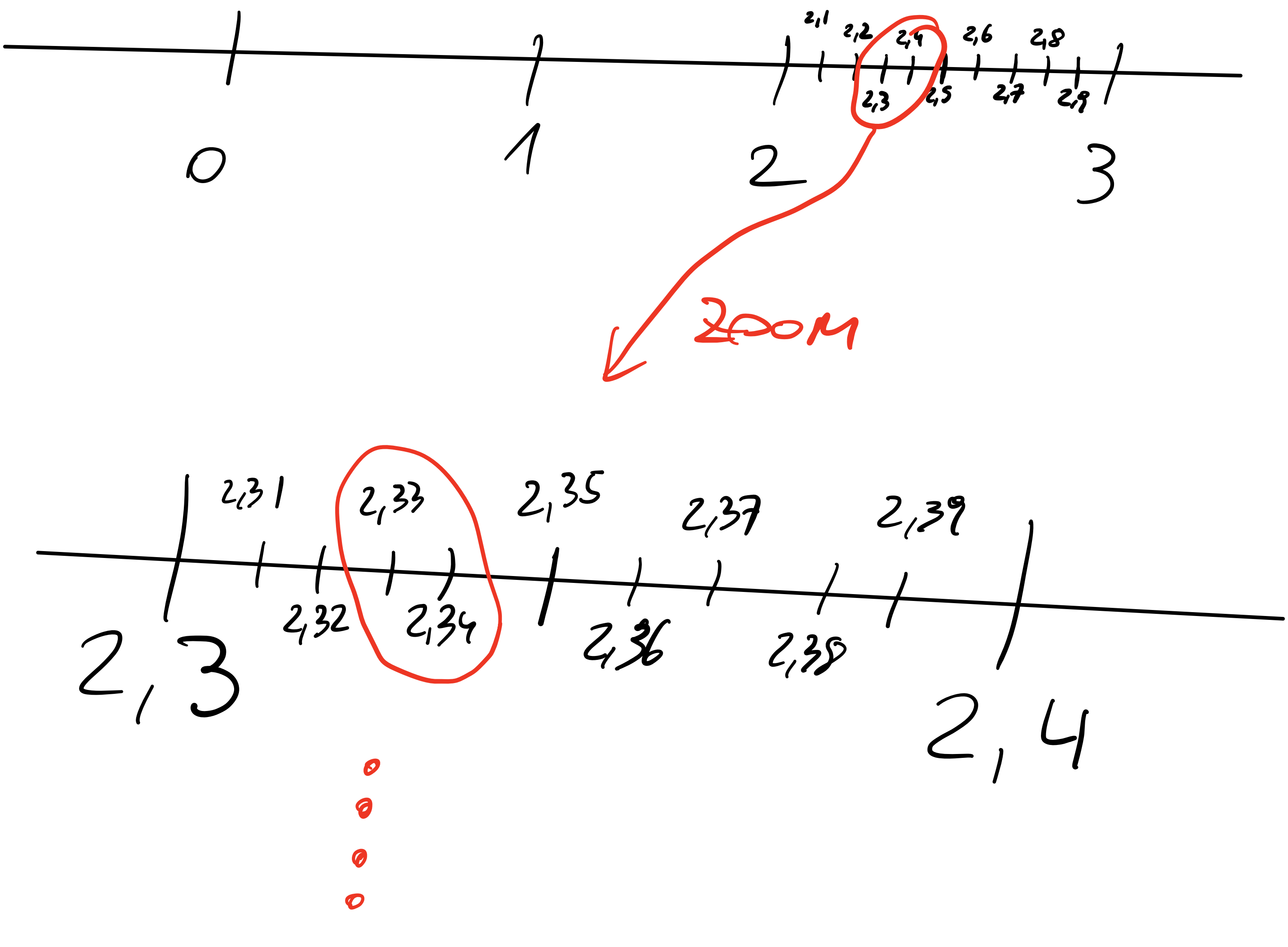
$a_0 \in \mathbb{N}$

$a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \quad \forall i \geqslant 1 \quad \dots$

Ej: $11,2\overbrace{3}^{a_2=3}5\overbrace{1}^{a_4=1}2357777\dots$

$a_0=11$ $a_1=2$ $a_3=5$

¿qué queremos decir cuando nos referimos al 2,3333....



Dentro de los números reales están los

números racionales,

y estos corresponden a aquellos números reales cuya representación decimal es <u>eventualmente periódica</u>

por ejemplo:

- $2,3\boxed{51}\boxed{51}\boxed{51}\boxed{51}\ldots$
- $-0,\boxed{32}\boxed{32}\boxed{32}\ldots$
- $0,12\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}000\ldots$

<u>Proposición:</u> Sea $x \in \mathbb{R}$

Entonces $x \in \mathbb{Q} \iff$ la representación decimal de x es eventualmente periódica

Veamos en un ejemplo porqué se cumple ($\Leftarrow$)

Ej: $X = 6{,}4444\ldots$

$10X = 64{,}444\ldots$

$10X - 1X = 64{,}444\ldots - 6{,}4444\ldots$

$= 64 - 6 = 58$

$\Rightarrow 9X = 58 \Rightarrow X = \dfrac{58}{9}$