

# FÍSICA 1

4<sup>a</sup> Edición



Resnick | Halliday | Krane

# CONTENIDO

<hr/> <hr/>		3-4 Suma de Vectores: Método de las Componentes	46
<hr/> <hr/>		3-5 Multiplicación de Vectores	48
<hr/> <hr/>		3-6 Las Leyes Vectoriales en la Física ( <i>Opcional</i> )	50
<hr/> <hr/>		Preguntas y Problemas	53
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>1</b>	<hr/> <hr/>	
<b>MEDICIONES</b>		<b>CAPÍTULO 4</b>	
1-1 Las Cantidades Físicas, Patrones y Unidades	1	<b>MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL</b>	
1-2 El Sistema Internacional de Unidades	2	<b>Y TRIDIMENSIONAL</b>	<b>59</b>
1-3 Patrón de Tiempo	3	<hr/> <hr/>	
1-4 Patrón de Longitud	5	4-1 Posición, Velocidad, y Aceleración	59
1-5 Patrón de Masa	7	4-2 Movimiento con Aceleración Constante	61
1-6 Precisión y Cifras Significativas	8	4-3 Movimiento de proyectiles	63
1-7 Análisis Dimensional	10	4-4 Movimiento Circular Uniforme	67
Preguntas y Problemas	11	4-5 Vectores de Velocidad y de Aceleración en el Movimiento Circular ( <i>Opcional</i> )	69
<hr/> <hr/>		4-6 Movimiento Relativo	71
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>17</b>	Preguntas y Problemas	74
<b>MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL</b>		<hr/> <hr/>	
2-1 Cinemática de la Partícula	17	<b>CAPÍTULO 5</b>	
2-2 Descripciones del Movimiento	17	<b>FUERZA Y LAS LEYES</b>	
2-3 Velocidad Promedio	20	<b>DE NEWTON</b>	<b>87</b>
2-4 Velocidad Instantánea	21	<hr/> <hr/>	
2-5 Movimiento Acelerado	23	5-1 Mecánica Clásica	87
2-6 Movimiento con Aceleración Constante	25	5-2 Primera Ley de Newton	88
2-7 Cuerpos en Caída Libre	28	5-3 Fuerza	90
2-8 Galileo y la Caída-Libre ( <i>Opcional</i> )	29	5-4 Masa	90
2-9 Medición de la Aceleración en Caída Libre ( <i>Opcional</i> )	30	5-5 Segunda Ley de Newton	92
Preguntas y Problemas	31	5-6 Tercera Ley de Newton	94
<hr/> <hr/>		5-7 Unidades de Fuerza	96
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>41</b>	5-8 Peso y Masa	97
<b>VECTORES</b>		5-9 Medición de Fuerzas	99
3-1 Vectores y Escalares	41	5-10 Aplicaciones de las Leyes de Newton	100
3-2 Suma de Vectores: Método Gráfico	42	5-11 Más Aplicaciones de las Leyes de Newton	103
3-3 Componentes de Vectores	43	Preguntas y Problemas	106

---



---

**CAPÍTULO 6**  
**DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117**

---

6-1 Leyes de la Fuerza	117
6-2 Fuerzas de Fricción	118
6-3 La Dinámica del Movimiento Circular Uniforme	123
6-4 Ecuaciones del Movimiento: Fuerzas Constantes y No Constantes	126
6-5 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Analíticos	128
6-6 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Numéricos ( <i>Opcional</i> )	129
6-7 Fuerzas de Arrastre y el Movimiento de proyectiles	130
6-8 Marcos No Inerciales y Seudofuerzas ( <i>Opcional</i> )	133
6-9 Limitaciones de las Leyes de Newton ( <i>Opcional</i> )	135
Preguntas y Problemas	137

---



---

**CAPÍTULO 7**  
**TRABAJO Y ENERGÍA 149**

---

7-1 Trabajo Efectuado por una Fuerza Constante	149
7-2 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Unidimensional	153
7-3 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Bidimensional ( <i>Opcional</i> )	155
7-4 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía	157
7-5 Potencia	159
7-6 Marcos de Referencia ( <i>Opcional</i> )	160
7-7 Energía Cinética a Altas Velocidades ( <i>Opcional</i> )	162
Preguntas y Problemas	163

---



---

**CAPÍTULO 8**  
**CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171**

---

8-1 Fuerzas Conservativas	171
8-2 Energía Potencial	174
8-3 Sistemas Conservativos Unidimensionales	176
8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionales: La Solución Completa	179
8-5 Sistemas Conservativos Bidimensionales y Tridimensionales ( <i>Opcional</i> )	182
8-6 Conservación de la Energía en un Sistema de Partículas	183

8-7 Masa y Energía ( <i>Opcional</i> )	187
8-8 Cuantización de la Energía ( <i>Opcional</i> )	189
Preguntas y Problemas	190

---



---

**CAPÍTULO 9**  
**SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203**

---

9-1 Sistemas de Dos Partículas	203
9-2 Sistemas de Muchas Partículas	206
9-3 Centro de Masa de Objetos Sólidos	209
9-4 Ímpetu Lineal de una Partícula	212
9-5 Ímpetu Lineal de un Sistema de Partículas	213
9-6 Conservación del Ímpetu Lineal	214
9-7 Trabajo y Energía en un Sistema de Partículas ( <i>Opcional</i> )	217
9-8 Sistemas de Masa Variable ( <i>Opcional</i> )	220
Preguntas y Problemas	224

---



---

**CAPÍTULO 10**  
**COLISIONES 233**

---

10-1 ¿Qué es una Colisión?	233
10-2 Impulso e Ímpetu	234
10-3 Conservación e Ímpetu Durante las Colisiones	236
10-4 Colisiones en una Dimensión	237
10-5 Colisiones Bidimensionales	241
10-6 Marco de Referencia del Centro de Masa	244
10-7 Procesos de Desintegración Espontánea ( <i>Opcional</i> )	248
Preguntas y Problemas	250

---



---

**CAPÍTULO 11**  
**CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261**

---

11-1 Movimiento de Rotación	261
11-2 Las Variables de la Rotación	262
11-3 Rotación con Aceleración Angular Constante	264
11-4 Cantidades de Rotación como Vectores	265
11-5 Relaciones Entre Variables Lineales y Angulares: Forma Escalar	268
11-6 Relaciones Entre las Variables Lineales y Angulares: Forma Vectorial ( <i>Opcional</i> )	269
Preguntas y Problemas	271

---



---

**CAPÍTULO 12**  
**DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277**

---

12-1 Dinámica de la Rotación: Una Visión General	277
--	-----

12-2 Energía Cinética de la Rotación e Inercia de la Rotación	278
12-3 Inercia de Rotación de los Cuerpos Sólidos	281
12-4 Torca que Actúa Sobre una Partícula	283
12-5 Dinámica de la Rotación de un Cuerpo Rígido	286
12-6 Movimientos de Rotación y de Traslación	
Combinados	290
Preguntas y Problemas	296

---

**CAPÍTULO 13**  
**ÍMPETU ANGULAR** **305**

---

13-1 Ímpetu Angular de una Partícula	305
13-2 Sistemas de Partículas	307
13-3 Ímpetu Angular y Velocidad Angular	309
13-4 Conservación del Ímpetu Angular	313
13-5 El Trompo	319
13-6 Cuantización del Ímpetu Angular ( <i>Opcional</i> )	320
13-7 Dinámica Rotacional: un Repaso	321
Preguntas y Problemas	321

---

**CAPÍTULO 14**  
**EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS** **331**

---

14-1 Condiciones de Equilibrio	331
14-2 Centro de Gravedad	332
14-3 Ejemplos de Equilibrio	334
14-4 Equilibrio Estable, Inestable y Neutro de los Cuerpos Rígidos en un Campo Gravitatorio	339
14-5 Elasticidad	341
Preguntas y Problemas	344

---

**CAPÍTULO 15**  
**OSCILACIONES** **353**

---

15-1 Sistemas Oscilatorios	353
15-2 El Oscilador Armónico Simple	355
15-3 Movimiento Armónico Simple	356
15-4 Consideraciones Energéticas en el Movimiento Armónico Simple	359
15-5 Aplicaciones del Movimiento Armónico Simple	361
15-6 Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme	365
15-7 Combinaciones de Movimientos Armónicos	367
15-8 Movimiento Armónico Amortiguado ( <i>Opcional</i> )	368

15-9 Oscilaciones Forzadas y Resonancia ( <i>Opcional</i> )	370
15-10 Oscilaciones de Dos Cuerpos ( <i>Opcional</i> )	371
Preguntas y Problemas	373

---

**CAPÍTULO 16**  
**GRAVITACIÓN** **383**

---

16-1 La Gravitación Desde la Antigüedad Hasta Kepler	383
16-2 Newton y la Ley de la Gravitación Universal	385
16-3 La Constante Gravitatoria $G$	386
16-4 La Gravedad Cerca de la Superficie de la Tierra	388
16-5 Efecto Gravitatorio de una Distribución Esférica de la Materia ( <i>Opcional</i> )	390
16-6 Energía Potencial Gravitatoria	393
16-7 El Campo Gravitatorio y el Potencial ( <i>Opcional</i> )	396
16-8 Los Movimientos de Planetas y Satélites	397
16-9 Gravitación Universal	402
16-10 La Teoría General de la Relatividad ( <i>Opcional</i> )	404
Preguntas y Problemas	408

---

**CAPÍTULO 17**  
**ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS** **419**

---

17-1 Fluidos y Sólidos	419
17-2 Presión y Densidad	420
17-3 Variación de la Presión en un Fluido en Reposo	422
17-4 Principio de Pascal y Principio de Arquímedes	426
17-5 Medición de la Presión	429
17-6 Tensión Superficial ( <i>Opcional</i> )	431
Preguntas y Problemas	433

---

**CAPÍTULO 18**  
**DINÁMICA DE LOS FLUIDOS** **441**

---

18-1 Conceptos Generales del Flujo de los Fluidos	441
18-2 Trayectoria de una Corriente y la Ecuación de Continuidad	442
18-3 La Ecuación de Bernoulli	445
18-4 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli y de la Ecuación de Continuidad	447
18-5 Campos de Flujo ( <i>Opcional</i> )	450

18-6	Viscosidad, Turbulencia, y Flujo Caótico ( <i>Opcional</i> )	453
	Preguntas y Problemas	456

---



---

**CAPÍTULO 19**  
**MOVIMIENTO ONDULATORIO** **465**

---

19-1	Ondas Mecánicas	465
19-2	Tipos de Ondas	466
19-3	Ondas Viajeras	467
19-4	Velocidad de Onda	471
19-5	La Ecuación de la Onda ( <i>Opcional</i> )	471
19-6	Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio	475
19-7	El Principio de Superposición	476
19-8	Interferencia de Ondas	478
19-9	Ondas Estacionarias	482
19-10	Resonancia	485
	Preguntas y Problemas	487

---



---

**CAPÍTULO 20**  
**ONDAS SONORAS** **495**

---

20-1	La Velocidad del Sonido	495
20-2	Ondas Viajeras Longitudinales	497
20-3	Potencia e Intensidad de las Ondas Sonoras	499
20-4	Ondas Longitudinales Estacionarias	501
20-5	Sistemas Vibratorios y Fuentes de Sonido	503
20-6	Pulsaciones	506
20-7	El Efecto Doppler	508
	Preguntas y Problemas	511

---



---

**CAPÍTULO 21**  
**LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD** **519**

---

21-1	Las Dificultades con la Física Clásica	519
21-2	Los Postulados de la Relatividad Especial	521
21-3	Consecuencias de los Postulados de Einstein	522
21-4	La Transformación de Lorentz	526
21-5	Medición de las Coordenadas Espacio-Tiempo de un Suceso	529
21-6	La Transformación de las Velocidades	529
21-7	Consecuencias de la Transformación de Lorentz	531
21-8	Ímpetu Relativista	535
21-9	Energía Relativista	537
21-10	La Lógica la Relatividad Especial	540
	Preguntas y Problemas	541

---



---

**CAPÍTULO 22**  
**TEMPERATURA** **547**

---

22-1	Descripción Macroscópica y Descripción Microscópica	547
22-2	Temperatura y Equilibrio Térmico	548
22-3	Medición de la Temperatura	549
22-4	La Escala de Temperatura de un Gas Ideal	552
22-5	Dilatación Térmica	554
	Preguntas y Problemas	558

---



---

**CAPÍTULO 23**  
**LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL** **565**

---

23-1	Propiedades Macroscópicas de un Gas y la Ley del Gas Ideal	565
23-2	El Gas Ideal: Un Modelo	568
23-3	Cálculo Cinético de la Presión	569
23-4	Interpretación Cinética de la Temperatura	571
23-5	Trabajo Efectuado Sobre un Gas Ideal	572
23-6	La Energía Interna de un Gas Ideal	576
23-7	Fuerzas Intermoleculares ( <i>Opcional</i> )	578
23-8	La Ecuación de Estado de van der Waals ( <i>Opcional</i> )	579
	Preguntas y Problemas	581

---



---

**CAPÍTULO 24**  
**MECÁNICA ESTADÍSTICA** **587**

---

24-1	Distribuciones Estadísticas y Valores Medios	587
24-2	Recorrido libre medio	589
24-3	La Distribución de las Velocidades Moleculares	593
24-4	La Distribución de las Energías	597
24-5	Movimiento Browniano	599
24-6	Distribuciones Estadísticas Cuánticas ( <i>Opcional</i> )	600
	Preguntas y Problemas	603

---



---

**CAPÍTULO 25**  
**EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA** **607**

---

25-1	El Calor: Energía en Tránsito	607
25-2	Capacidad Calorífica y Calor Específico	609
25-3	Capacidades Caloríficas de los Sólidos	611
25-4	Capacidades Caloríficas de un Gas Ideal	612

25-5 La Primera Ley de la Termodinámica	616
25-6 Aplicaciones de la Primera Ley	619
25-7 La Transferencia de Calor	622
Preguntas y Problemas	626

---



---

**CAPÍTULO 26**  
**ENTROPIA Y LA SEGUNDA LEY**  
**DE LA TERMODINÁMICA** **635**

---



---

26-1 Procesos Reversibles y Procesos Irreversibles	635
26-2 Máquinas Térmicas y la Segunda Ley	637
26-3 Refrigeradores y la Segunda Ley	639
26-4 El Ciclo de Carnot	641
26-5 La Escala de Temperatura Termodinámica	644
26-6 Entropía: Procesos Reversibles	646
26-7 Entropía: Procesos Irreversibles	648
26-8 Entropía y la Segunda Ley	650
26-9 Entropía y Probabilidad	651
Preguntas y Problemas	653

---



---

**APÉNDICES**

---



---

A El Sistema Internacional de Unidades (SI)	A-1
B Algunas Constantes Fundamentales de la Física	A-3
C Algunos Datos Astronómicos	A-4
D Propiedades de los Elementos	A-5
E Tabla Periódica de los Elementos	A-7
F Partículas Elementales	A-8
G Factores de Conversión	A-10
H Fórmulas Matemáticas	A-14
I Programas de Computadora	A-16
J Premios Nobel de Física	A-20
K Tablas	A-24

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS IMPARES	A-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS	F-1
ÍNDICE	I-1

## CAPÍTULO 14

# EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

Las torres que soportan un puente colgante deben ser lo suficientemente fuertes como para que no se desplomen bajo el peso del puente y su carga de tránsito; el tren de aterrizaje de un aeroplano no debe romperse si el piloto realiza un mal aterrizaje; una silla no debe derrunbarse ni volcarse cuando nos sentemos en ella. En todos esos problemas el diseñador se preocupa de que estas estructuras supuestamente rígidas realmente permanezcan rígidas bajo las fuerzas y las torcas asociadas que actúan sobre ellas.

En esta clase de problemas debemos plantearnos dos preguntas: (1) ¿Qué fuerzas y torcas actúan sobre el cuerpo supuestamente rígido? (2) Teniendo en cuenta su diseño y los materiales empleados, ¿permanecerá rígido el cuerpo bajo la acción de estas fuerzas y torcas? En este capítulo nos ocuparemos a fondo de la primera pregunta. Para responder a la segunda, debemos estudiar con gran detalle las propiedades de los materiales. Queda fuera del propósito de este libro tratar este tema exhaustivamente; así, en la última sección de este capítulo ofrecemos una breve exposición.

### 14-1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se dice que un cuerpo rígido, como puede ser una silla, un puente, o un edificio, está en *equilibrio mecánico* si, visto desde un marco de referencia inercial, tanto el *ímpetu lineal*  $\mathbf{P}$  como el *ímpetu angular*  $\mathbf{L}$  del cuerpo rígido tienen un valor constante. De manera equivalente, podríamos decir que tanto la aceleración lineal  $\mathbf{a}_{cm}$  de su centro de masa como la aceleración angular  $\alpha$  respecto a cualquier eje fijo en el marco de referencia son cero.

Esta definición del equilibrio mecánico no requiere que el cuerpo esté en reposo; esto es,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{L}$  no tienen necesariamente el valor constante de cero. Si son cero (o, lo que es lo mismo, si la velocidad del centro de masa  $\mathbf{v}_{cm}$  y la velocidad angular  $\omega$  respecto a cualquier eje en el marco son ambas cero), entonces estamos ante una situación de *equilibrio estático*.

En este capítulo buscamos cuáles son las restricciones que deben imponerse a las fuerzas y a las torcas que actúan sobre un cuerpo para crear una condición de equilibrio. Nos concentraremos en los casos de equilibrio estático, si

bien, como veremos, las mismas restricciones son aplicables tanto si el equilibrio es estático como si no lo es.

El movimiento de traslación del centro de masa de un cuerpo rígido se rige por la ecuación 27 del capítulo 9,

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt},$$

en la que  $\sum \mathbf{F}_{ext}$  es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo. Si  $\mathbf{P}$  tiene un valor constante, incluso cero, debemos tener que  $d\mathbf{P}/dt = 0$ . Así pues, la primera condición del equilibrio es que *la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero*, o sea

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = 0. \quad (1)$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a tres ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad (2)$$

donde, por conveniencia, hemos suprimido el subíndice "ext" de  $\mathbf{F}_{ext}$ . Las ecuaciones 1 y 2 postulan que la suma

de las componentes de las fuerzas externas a lo largo de cada una de tres direcciones mutuamente perpendiculares es cero.

El movimiento rotatorio de un cuerpo rígido está regido por la ecuación 8 del capítulo 13, es decir,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt},$$

donde  $\sum \tau_{\text{ext}}$  es la suma de todas las torcas externas que actúan sobre el cuerpo. Si el ímpetu angular  $L$  tiene cualquier valor constante, incluso cero, debemos tener que  $dL/dt = 0$ . Por tanto, la segunda condición del equilibrio es que la suma vectorial de todas las torcas externas que actúen sobre el cuerpo debe ser cero, o sea,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = 0. \quad (3)$$

Esta ecuación vectorial puede expresarse como tres ecuaciones escalares (nuevamente suprimiendo el subíndice "ext"):

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0, \quad (4)$$

que postulan que, en el equilibrio, la suma de las componentes de las torcas que actúan sobre un cuerpo, a lo largo de cada una de tres direcciones mutuamente perpendiculares, es cero.

La segunda condición del equilibrio es independiente de la elección del origen y de los ejes de coordenadas que se usen para calcular las componentes de las torcas. Si la torca neta es cero, entonces sus componentes son cero para cualquier elección de los ejes  $x$ ,  $y$ , y  $z$ . Además, para un cuerpo en equilibrio, la elección del origen para calcular las torcas es irrelevante y puede hacerse según convenga; si  $\tau = 0$  con respecto a un origen  $O$  en particular, entonces es cero con respecto a cualquier otro punto en el marco de referencia de un cuerpo en equilibrio.

Probemos este último postulado. Supongamos que se aplican  $N$  fuerzas externas sobre el objeto. Respecto al origen  $O$ , la fuerza  $F_1$  se ejerce en un punto ubicado en  $r_1$ , la fuerza  $F_2$  en  $r_2$ , y así sucesivamente. La torca neta con respecto a  $O$  es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tau_O &= \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_N \\ &= r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + \cdots + r_N \times F_N. \end{aligned} \quad (5)$$

Supongamos que un punto  $P$  está situado en el desplazamiento  $r_p$  con respecto a  $O$  (Fig. 1). El punto de aplicación de  $F_1$ , con respecto a  $P$ , es  $(r_1 - r_p)$ . La torca con respecto a  $P$  es

$$\begin{aligned} \tau_P &= (r_1 - r_p) \times F_1 + (r_2 - r_p) \times F_2 \\ &\quad + \cdots + (r_N - r_p) \times F_N \\ &= [r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + \cdots + r_N \times F_N] \\ &\quad - [r_p \times F_1 + r_p \times F_2 + \cdots + r_p \times F_N]. \end{aligned}$$

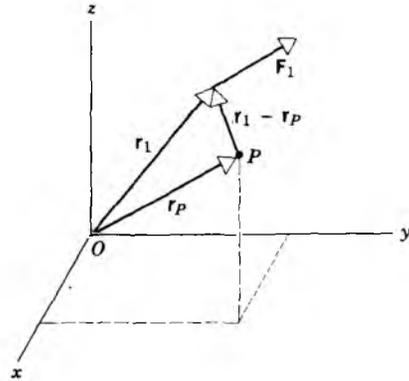


Figura 1 La fuerza  $F_1$  es una de las  $N$  fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (no mostrado). El vector  $r_1$  sitúa al punto de aplicación de  $F_1$  con relación a  $O$  y se usa para calcular la torca de  $F_1$  con respecto a  $O$ . El vector  $r_1 - r_p$  se usa para calcular la torca de  $F_1$  con respecto a  $P$ .

El primer grupo de términos entre corchetes da  $\tau_O$  de acuerdo con la ecuación 5. Podemos reescribir el segundo grupo suprimiendo el factor constante de  $r_p$ :

$$\begin{aligned} \tau_P &= \tau_O - [r_p \times (F_1 + F_2 + \cdots + F_N)] \\ &= \tau_O - \left[ r_p \times \left( \sum F_{\text{ext}} \right) \right] \\ &= \tau_O, \end{aligned}$$

donde llevamos a cabo el último paso porque  $\sum F_{\text{ext}} = 0$  para un cuerpo en equilibrio de traslación. Entonces, la torca con respecto a dos puntos cualesquiera tiene el mismo valor cuando el cuerpo está en equilibrio de traslación.

A menudo tratamos con problemas en que todas las fuerzas están en un plano. En este caso las seis condiciones de las ecuaciones 2 y 4 se reducen a tres. Resolvemos las fuerzas en dos componentes:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad (6)$$

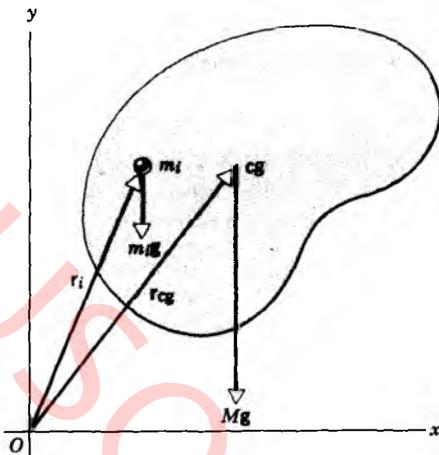
y, si calculamos las torcas con respecto a un punto que también esté en el plano  $xy$ , todas las torcas deben estar en la dirección perpendicular al plano  $xy$ . En este caso tenemos

$$\sum \tau_z = 0. \quad (7)$$

Nos limitaremos, sobre todo, a problemas en un plano para simplificar los cálculos; esta condición no impone ninguna restricción fundamental a la aplicación de los principios generales del equilibrio.

## 14-2 EL CENTRO DE GRAVEDAD

Una de las fuerzas que se encuentran en la dinámica del cuerpo rígido es la fuerza de la gravedad, la cual es



**Figura 2** Cada partícula de un cuerpo, como el representado con masa  $m_i$ , experimenta una fuerza gravitatoria como  $m_i g$ . Todo el peso del cuerpo, aunque distribuido en todo su volumen como la suma de las fuerzas gravitatorias sobre todas sus partículas, puede ser reemplazado por una fuerza única de magnitud  $Mg$  que actúa en el centro de gravedad. Si el campo gravitatorio es uniforme (esto es, el mismo para todas las partículas), el centro de gravedad coincide con el centro de masa, y entonces  $r_{cm}$  es el mismo que  $r_{cg}$ .

responsable del peso del cuerpo. Con autoridad (y sin justificación), hemos representado a fuerza sobre un cuerpo de masa  $M$  por medio de un vector aislado  $Mg$  que actuaba en el centro de masa del cuerpo. Aquí justificaremos este paso y estudiaremos las condiciones bajo las cuales es válida.

El peso de un cuerpo extenso es en realidad la resultante de un gran número de fuerzas, cada una de ellas debida a la gravedad, que actúa sobre cada una de las partículas del cuerpo. Esto es, podemos reemplazar al vector suma de las fuerzas gravitatorias de todas las partículas de un cuerpo con una sola fuerza: el peso. Además, la resultante neta de las torcas gravitatorias correspondientes sobre todas las partículas puede ser reemplazada por la torca debida a esa fuerza única si imaginamos que actúa en un punto del cuerpo llamado el *centro de gravedad*.

Si la aceleración gravitatoria  $g$  tiene el mismo valor en todos los puntos del cuerpo, lo cual es así en todos los casos prácticos de interés, ocurren entonces dos simplificaciones: (1) el peso es igual a  $Mg$ , y (2) el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Comprobemos estos dos resultados.

Imaginemos al cuerpo de masa  $M$  dividido en un gran número de partículas. La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la  $i$ ésima partícula de masa  $m_i$  es  $m_i g$ . Esta fuerza se halla dirigida hacia el centro de la Tierra. La fuerza neta sobre todo el objeto debida a la gravedad es la suma sobre todas y cada una de las partículas, o sea

$$\sum \mathbf{F} = \sum m_i g. \quad (8)$$

Puesto que hemos supuesto que  $g$  tiene el mismo valor para cada partícula del cuerpo, podemos sacar el factor  $g$  de la suma de la ecuación 8, lo cual da

$$\sum \mathbf{F} = g \sum m_i = Mg. \quad (9)$$

Esto comprueba la primera de las afirmaciones hechas anteriormente acerca de que podemos reemplazar a la fuerza resultante de la gravedad que actúa sobre todo el cuerpo por la fuerza única  $Mg$ .

Apliquemos ahora la condición de la torca, ecuación 3, tomando las torcas respecto al punto arbitrario  $O$ , como se muestra en la figura 2. El vector  $r_i$  localiza a la partícula de masa  $m_i$  con relación a este origen. La torca neta en torno a este punto debida a la gravedad que actúa sobre todas las partículas es

$$\sum \tau = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}) = \sum (m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}), \quad (10)$$

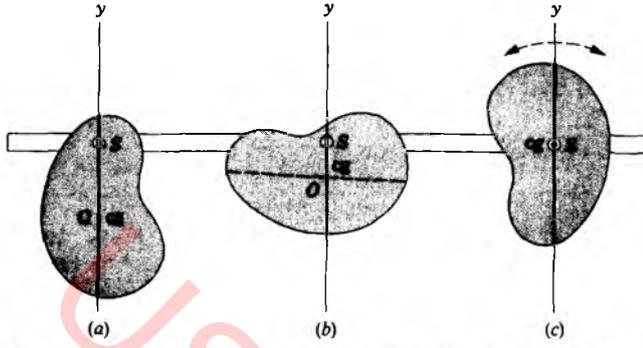
donde el último paso se toma introduciendo al escalar  $m_i$  dentro de la suma. Una vez más usamos la constancia de  $g$  para sacarla de la suma, teniendo cuidado de no cambiar el orden de los vectores  $r_i$  y  $g$  de modo que el signo del producto cruz no cambie. Según la ecuación 12 del capítulo 9, la suma restante,  $\sum m_i r_i$  es precisamente  $M r_{cm}$ , donde  $r_{cm}$  es el vector que sitúa al centro de masa del cuerpo con relación al origen  $O$ . En estos dos pasos, podemos expresar la ecuación 10 así:

$$\sum \tau = \left( \sum m_i r_i \right) \times \mathbf{g} = M r_{cm} \times \mathbf{g} = r_{cm} \times Mg. \quad (11)$$

La torca resultante sobre el cuerpo es, entonces, igual a la torca que sería producida por la fuerza única  $Mg$  que actúa en el centro de masa del cuerpo, y entonces el centro de gravedad (cg) coincide con el centro de masa, lo cual comprueba la segunda afirmación hecha anteriormente. Un corolario útil de la ecuación 11 es que la torca debida a la gravedad en torno al centro de masa de un cuerpo es cero.

¿En qué condiciones estará en equilibrio un cuerpo en la gravedad de la Tierra? Las ecuaciones 9 y 11 demuestran que, si aplicamos una fuerza única  $F'$  hacia arriba de magnitud  $Mg$  en el centro de masa, entonces tanto la fuerza neta como la torca neta serán cero, y nuestras condiciones de equilibrio se cumplirán. Sin embargo, también es cierto que el cuerpo estará en equilibrio si la fuerza  $F'$  hacia arriba está aplicada en cualquier punto de una línea vertical que pase por el centro de masa. La torca neta es cero en este caso, porque  $Mg$  y  $F'$  ( $= -Mg$ ) tienen la misma línea de acción. Por lo tanto, podemos equilibrar un objeto aplicando una fuerza vertical  $F'$  no sólo en el centro de masa, sino también en cualquier punto situado directamente encima o debajo del centro de masa.

Podemos emplear esta propiedad para hallar el centro de masa de un objeto extenso. Consideremos un cuerpo

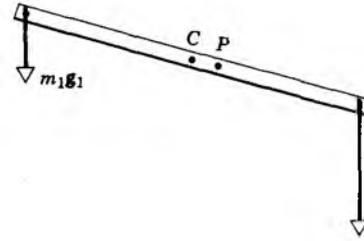


**Figura 3** Un cuerpo suspendido de un punto arbitrario  $S$ , como en (a) y (b), estará en equilibrio estable sólo si su centro de gravedad (cg) cuelga verticalmente bajo su punto de suspensión  $S$ . La línea punteada en (b) representa a la línea vertical en (a), demostrando que el centro de gravedad puede ser localizado al suspender al cuerpo de dos puntos diferentes en forma sucesiva. (c) Si un cuerpo es suspendido en su centro de gravedad, está en equilibrio sin importar cuál sea su orientación.

de forma arbitraria suspendido de un punto  $S$  (Fig. 3). El punto de soporte, que ejerce una fuerza hacia arriba  $\mathbf{F}' = -M\mathbf{g}$ , debe estar sobre una línea vertical con el centro de masa. Si trazamos una línea vertical a través de  $S$ , entonces sabemos que el centro de masa debe estar en algún punto de la línea. Podemos repetir el procedimiento tras una nueva elección del punto  $S$ , como en la figura 3b, y hallaremos una segunda línea que debe contener el centro de masa. El centro de masa debe, por lo tanto, estar en la intersección de las dos líneas.

Si suspendemos el objeto del centro de masa, como en la figura 3c, el cuerpo estará en equilibrio sin importar cuál sea su orientación. Podemos voltearlo a nuestro antojo y permanecerá en equilibrio. Esto ilustra el corolario de la ecuación 11: la torca debida a la gravedad es cero con respecto al centro de masa.

En esta sección hemos usado de manera indistinta los términos “centro de masa” y “centro de gravedad”. El centro de masa se define así para cualquier cuerpo y puede calcularse, según los métodos descritos en el capítulo 9, a partir del tamaño y la forma del cuerpo. Por otra parte, el centro de gravedad se define únicamente para los cuerpos situados dentro de un campo gravitatorio. Para calcular el centro de gravedad, debemos conocer no sólo los detalles geométricos del cuerpo, sino también la variación de  $\mathbf{g}$  sobre el cuerpo. Si  $\mathbf{g}$  no es constante sobre el cuerpo, entonces el centro de gravedad y el centro de masa no coinciden, y  $\mathbf{g}$  no puede suprimirse de las sumas en las ecuaciones 8 y 10. Consideremos una barra uniforme como la que se muestra en la figura 4, cuyo eje está inclinado en cierto ángulo diferente de cero respecto a la horizontal. El centro de masa  $C$  está el centro geométrico de la barra. Si el eje de la barra fuese horizontal, el centro



**Figura 4** Una barra uniforme en un campo gravitatorio no uniforme. El centro de gravedad está en  $P$ , el cual no coincide con el centro de masa  $C$ .

de gravedad  $P$  coincidiría con el centro de masa; esto es, una fuerza única hacia arriba  $\mathbf{F}'$  (de igual magnitud a  $M\mathbf{g}$ ) situada en  $C$  mantendría a la barra en equilibrio. Cuando el eje no es horizontal, esto no sucede así. Puesto que  $\mathbf{g}$  disminuye ligeramente con la distancia desde la Tierra, la partícula  $N$  en el extremo más bajo de la barra experimenta una atracción gravitatoria mayor que una partícula idéntica  $1$  en el extremo más alto. Para compensar la tendencia resultante de la barra a girar en sentido horario (o de las manecillas del reloj) en torno a  $C$ , el centro de gravedad  $P$  (el punto de aplicación de la fuerza equilibrante hacia arriba) debe estar situado un poco más abajo de  $C$ . Al cambiar el ángulo con la horizontal, cambiará la posición de  $P$ . Además, si movemos la barra a un lugar en donde  $\mathbf{g}$  tenga un valor diferente, la relación entre  $P$  y  $C$  para un ángulo de inclinación dado será diferente. Así, el centro de gravedad puede, en general, depender de la orientación del objeto, así como del campo gravitatorio local. Para una barra de un metro, inclinada en un ángulo de  $45^\circ$  en las cercanías de la superficie de la Tierra, la distancia entre el centro de masa y el centro de gravedad es de alrededor 18 nm, mucho más pequeña que la precisión con la que normalmente se trabaja en los problemas de equilibrio y, por lo tanto, completamente insignificante. En problemas de equilibrio, podemos suponer con seguridad que el centro de gravedad y el centro de masa coinciden.

### 14-3 EJEMPLOS DE EQUILIBRIO

Al aplicar las condiciones de equilibrio (fuerza resultante nula y torca resultante nula respecto a cualquier punto), podemos aclarar y simplificar el procedimiento como sigue.

En primer lugar, trazamos una frontera imaginaria alrededor del sistema en estudio. Esto ayuda a ver claramente a qué cuerpo o a qué sistema de cuerpos estamos aplicando las leyes de equilibrio. A este proceso se le llama *aislar al sistema*.

En segundo lugar, trazamos los vectores que representen la magnitud, la dirección, y el punto de aplicación

de todas las fuerzas *externas*. Una fuerza externa es aquella que actúa desde el exterior de la frontera que hayamos trazado en primer lugar. Ejemplos de fuerzas externas que se encuentran a menudo son las fuerzas gravitatorias y las fuerzas ejercidas por cuerdas, alambres, barras, y vigas que cruzan la frontera. Nótese que sólo es necesario considerar a las fuerzas externas que actúan sobre el sistema; todas las fuerzas internas se cancelan entre sí en pares.

Existen ciertos casos en que la dirección de una fuerza pudiera no ser obvia. Para determinar la dirección de cierta fuerza, tracemos un corte imaginario a través del miembro que ejerce la fuerza en el punto en que cruza la frontera. Si los extremos de este corte tienden a separarse, la fuerza actúa hacia afuera. En caso de duda, conviene elegir la dirección de la manera arbitraria. Un valor negativo de una fuerza en la solución significa que la fuerza actúa en dirección opuesta contraria a la que habríamos supuesto.

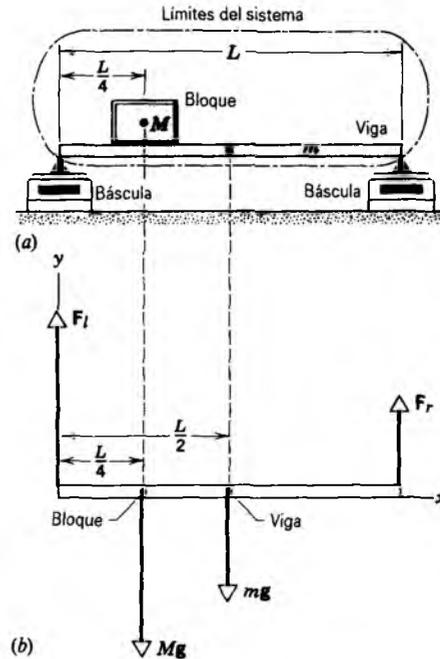
En tercer lugar, elegimos un sistema de coordenadas conveniente a lo largo de cuyos ejes resolvemos las fuerzas externas antes de aplicar la primera condición de equilibrio (Ecs. 1 ó 2). La meta, aquí, consiste en simplificar los cálculos. El sistema de coordenadas preferible es, por lo general, aquel que haga mínimo el número de fuerzas que deban ser resueltas en componentes.

En cuarto lugar, elegimos un sistema de coordenadas conveniente a lo largo de cuyos ejes resolvemos las torcas externas antes de aplicar la segunda condición de equilibrio (Ecs. 3 ó 4). Una vez más, la meta consiste en simplificar los cálculos, y podemos usar sistemas de coordenadas diferentes al aplicar las dos condiciones para el equilibrio estático si esto demuestra ser conveniente. Por ejemplo, al calcular las torcas con respecto a un punto a través del cual actúen varias fuerzas se eliminan las fuerzas de la ecuación de la torca.

En el equilibrio, las componentes de la torca que resulta de todas las fuerzas externas debe ser cero en torno a cualquier eje. Las torcas internas se cancelarán en pares y no necesitan ser consideradas. Seguimos la misma convención que en capítulos anteriores para el signo algebraico de la torca en torno a un eje en particular: tomamos a una torca como positiva si por sí misma produjera una rotación antihoraria en torno al eje.

**Problema muestra 1** Una viga uniforme de longitud  $L$  cuya masa  $m$  es de 1.8 kg descansa sobre sus extremos en dos básculas digitales, como en la figura 5a. Un bloque cuya masa  $M$  es de 2.7 kg reposa sobre la viga, con su centro situado a un cuarto de  $L$  a partir del extremo izquierdo de la viga. ¿Qué lectura arrojarán las básculas?

**Solución** Elegimos como nuestro sistema a la viga y al bloque juntos. La figura 5b es un diagrama de cuerpo libre de este sistema, que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. El peso de la viga,  $mg$ , actúa hacia abajo en su



**Figura 5** Problema muestra 1. (a) Una viga de masa  $m$  soporta a un bloque de masa  $M$ . Las básculas digitales muestran las fuerzas verticales ejercidas en los dos extremos de la viga. (b) Diagrama de cuerpo libre que muestra las fuerzas que actúan sobre el sistema consistente en viga + bloque.

centro de masa, el cual está en su centro geométrico, puesto que la viga es uniforme. De igual manera,  $Mg$ , el peso del bloque, actúa hacia abajo en su centro de masa. Las básculas empujan hacia arriba en los extremos de la viga con fuerzas  $F_l$  y  $F_r$ . Lo que buscamos son las magnitudes de estas últimas dos fuerzas, reflejadas en las lecturas que dan las básculas.

Nuestro sistema está en equilibrio estático, de modo que se aplica la ecuación del equilibrio de las fuerzas (Ec. 6) y la ecuación del equilibrio de las torcas (Ec. 7). Resolveremos este problema de dos modos equivalentes.

**1. Primera solución.** Las fuerzas no tienen componentes  $x$ , y por lo tanto la condición de que  $\sum F_x = 0$  no nos proporciona información alguna. Para las componentes  $y$ , tenemos

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = 0. \quad (12)$$

Existen dos fuerzas desconocidas ( $F_l$  y  $F_r$ ) pero no podemos obtenerlas por separado porque sólo tenemos (hasta ahora) una ecuación. Por fortuna, tenemos otra ecuación a la mano, es decir, la ecuación 7, la ecuación de equilibrio de las torcas.

Podemos aplicar la ecuación 7 a cualquier eje que forme un ángulo recto con el plano de la figura 5. Elijamos un eje que pase por el extremo izquierdo de la viga, de modo que desaparezca la incógnita  $F_l$  de la ecuación de la torca. Tendremos entonces, de la ecuación 7,

$$\sum \tau_z = (F_l)(0) + (F_r)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4) = 0, \quad (13)$$

o sea

$$\begin{aligned} F_r &= (g/4)(M + 2m) \\ &= (1/4)(9.8 \text{ m/s}^2)[2.7 \text{ kg} + 2(1.8 \text{ kg})] = 15 \text{ N.} \end{aligned}$$

Nótese cómo nuestra elección elimina a la fuerza  $F_1$  de la ecuación de la torca y nos permite resolver directamente para la otra fuerza. Si nos hubiéramos inclinado por tomar las torcas respecto a cualquier punto arbitrario, habríamos obtenido una ecuación en la que  $F_1$  y  $F_2$  podrían resolverse simultáneamente con la ecuación 12. Nuestra elección de ejes nos ayuda a simplificar el álgebra un tanto pero, por supuesto, de ninguna manera cambia la solución final.

Si sustituimos el valor de  $F_1$  en la ecuación 12 y resolvemos para  $F_2$ , hallamos que

$$F_2 = (M + m)g - F_1 \\ = (2.7 \text{ kg} + 1.8 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - 15 \text{ N} = 29 \text{ N}.$$

Nótese que la altura del centro de masa del bloque no interviene en la solución de este problema. ¿Es esto físicamente razonable?

**2. Segunda solución.** Como comprobación, resolvamos este problema de un modo diferente, aplicando la ecuación de equilibrio de las torcas en torno a dos ejes diferentes. Al elegir a un eje que pase por el extremo izquierdo de la viga, como lo hicimos anteriormente, hallamos la solución  $F_2 = 15 \text{ N}$ .

Para un segundo eje que pase por el extremo derecho de la viga, la ecuación 7 nos da

$$\sum \tau_z = (F_2)(0) - (F_1)(L) + (mg)(L/2) + (Mg)(3L/4) = 0. \quad (14)$$

Resolviendo para  $F_1$ , hallamos

$$F_1 = (g/4)(3M + 2m) \\ = (1/4)(9.8 \text{ m/s}^2)[3(2.7 \text{ kg}) + 2(1.8 \text{ kg})] = 29 \text{ N},$$

de acuerdo con nuestro resultado anterior. Nótese que la longitud de la viga no interviene explícitamente en este problema.

La solución para las dos incógnitas en este problema ( $F_1$  y  $F_2$ ) exige dos ecuaciones independientes. En este segundo método, nuestras dos ecuaciones (Ecs. 13 y 14) provienen de las dos ecuaciones de las torcas; la ecuación de la fuerza (Ec. 12) no proporciona una información independiente. De hecho, como puede demostrarse, al restar las dos ecuaciones de las torcas nos da la ecuación de la fuerza.

**Problema muestra 2** Un bolichista sostiene en la palma de la mano una bola de boliche cuya masa  $M$  es de 7.2 kg. Como lo muestra la figura 6a, el brazo está vertical y el antebrazo está horizontal. ¿Qué fuerzas deberán ejercer el músculo bíceps y la estructura ósea del brazo sobre el antebrazo? El antebrazo y la mano juntos tienen una masa  $m$  de 1.8 kg, y las dimensiones necesarias son  $d = 4.0 \text{ cm}$ ,  $D = 15 \text{ cm}$ , y  $L = 33 \text{ cm}$ .

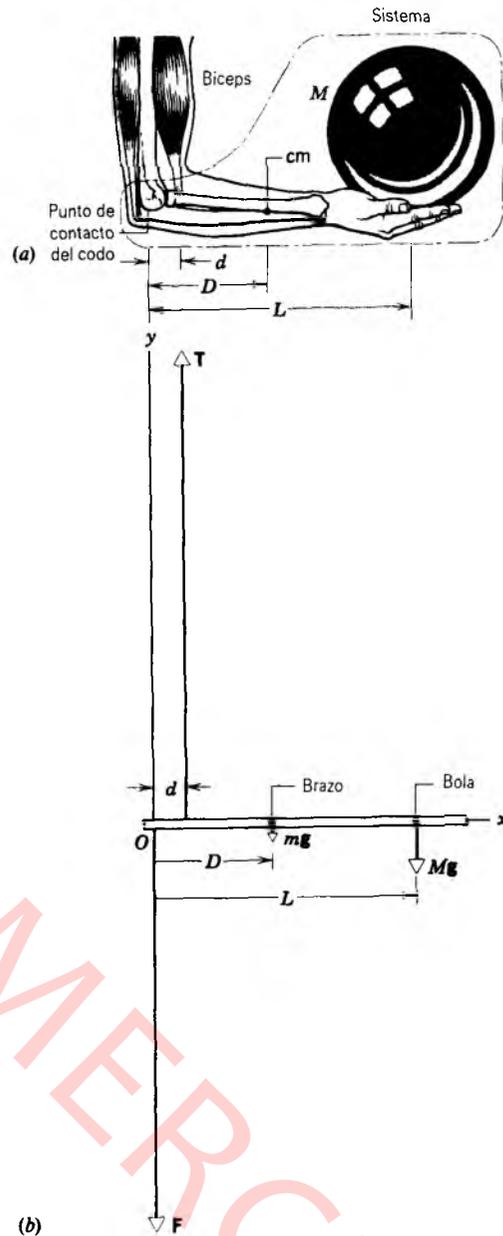
**Solución** Nuestro sistema consta del antebrazo y la bola de boliche juntos. La figura 6b muestra un diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas desconocidas son  $T$ , la fuerza ejercida por el músculo bíceps, y  $F$ , la fuerza ejercida por el brazo sobre el antebrazo. Al igual que en el problema muestra 1, todas las fuerzas son verticales.

Partiendo de la ecuación 6,  $\sum F_y = 0$ , hallamos

$$\sum F_y = T - F - mg - Mg = 0. \quad (15)$$

Aplicando la ecuación 7 respecto a un eje que pase por  $O$  y tomando las rotaciones en sentido antihorario como positivas, obtenemos

$$\sum \tau_z = (T)(d) + (F)(0) - (mg)(D) - (Mg)(L) = 0. \quad (16)$$

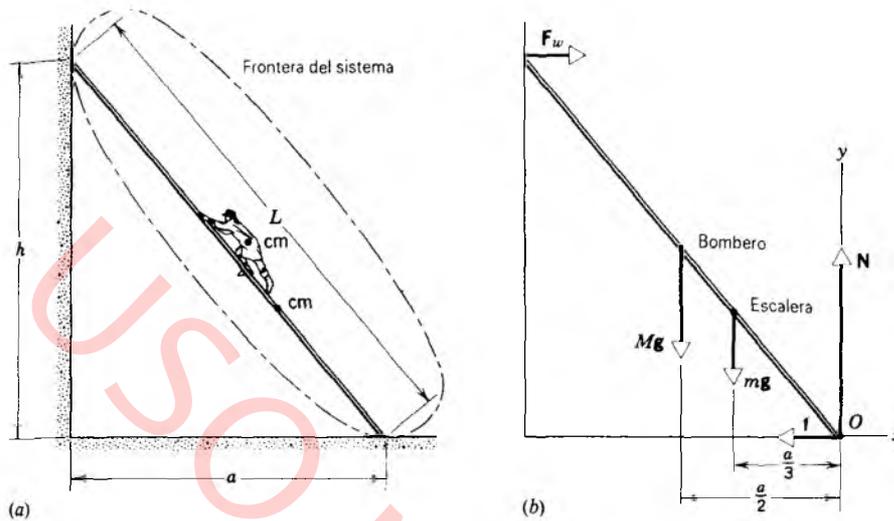


**Figura 6** Problema muestra 2. (a) Una mano sostiene una bola de boliche. Se marca la frontera del sistema.

(b) Diagrama de cuerpo libre, que muestra las fuerzas que actúan. Los vectores están a escala, mostrando las potentes fuerzas ejercidas por el músculo bíceps y por el brazo en la articulación del codo (punto  $O$ ).

Al elegir que nuestro eje pase por el punto  $O$ , hemos eliminado la variable  $F$  de esta ecuación. La ecuación 16, resuelta para  $T$ , nos da

$$T = g \frac{mD + ML}{d} \\ = (9.8 \text{ m/s}^2) \frac{(1.8 \text{ kg})(15 \text{ cm}) + (7.2 \text{ kg})(33 \text{ cm})}{4.0 \text{ cm}} \\ = 648 \text{ N} = 146 \text{ lb}.$$



**Figura 7** Problemas muestra 3 y 4. (a) Un bombero está a medio camino de una escalera apoyada contra una pared sin fricción. (b) Diagrama de cuerpo libre, que muestra (a escala) las fuerzas que actúan.

Entonces el músculo bíceps debe jalar del antebrazo con una fuerza que sea alrededor de nueve veces más grande que el peso de la bola de boliche.

Si resolvemos la ecuación 15 para  $F$  y sustituimos en ella el valor de  $T$  dado arriba, hallamos

$$\begin{aligned} F &= T - g(M + m) \\ &= 648 \text{ N} - (9.8 \text{ m/s}^2)(7.2 \text{ kg} + 1.8 \text{ kg}) \\ &= 560 \text{ N} = 126 \text{ lb.} \end{aligned}$$

La fuerza  $F$  es también grande, siendo alrededor de ocho veces el peso de la bola de billar.

**Problema muestra 3** Una escalera cuya longitud  $L$  es de 12 m y cuya masa  $m$  es de 45 kg descansa contra una pared. Su extremo superior está a una distancia  $h$  de 9.3 m del suelo, como vemos en la figura 7a. El centro de masa de la escalera está a un tercio del camino hacia arriba. Un bombero cuya masa  $M$  es de 72 kg sube por la escalera. Suponga que la pared, pero no el suelo, carece de fricción. ¿Qué fuerzas ejercen sobre la escalera la pared y el suelo?

**Solución** La figura 7b muestra un diagrama de cuerpo libre. La pared ejerce una fuerza horizontal  $F_w$  sobre la escalera; no puede ejercer fuerza vertical alguna porque se supone que el punto de contacto entre la pared y la escalera está libre de fricción. El suelo ejerce una fuerza sobre la escalera con una componente horizontal  $f$  debida a la fricción y una componente vertical  $N$ , la fuerza normal. Elegimos los ejes de coordenadas como se muestra, con el origen  $O$  en el punto en que la escalera se apoya en el suelo. La distancia  $a$  desde la pared al pie de la escalera se halla fácilmente a partir de

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{(12 \text{ m})^2 - (9.3 \text{ m})^2} = 7.6 \text{ m.}$$

Partiendo de la ecuación 6, la ecuación de equilibrio de las fuerzas, tenemos que, respectivamente,

$$\sum F_x = F_w - f = 0 \quad (17)$$

y

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0. \quad (18)$$

La ecuación 18 da

$$\begin{aligned} N &= g(M + m) \\ &= (9.8 \text{ m/s}^2)(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg}) = 1150 \text{ N.} \end{aligned}$$

Partiendo de la ecuación 7, la ecuación del equilibrio de las torcas, tenemos, tomando un eje que pase por  $O$ , el punto de contacto de la escalera con el suelo,

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) = 0. \quad (19)$$

Esta acertada elección de la posición de los ejes elimina dos variables,  $f$  y  $N$ , de la ecuación de equilibrio de las torcas. Podemos hallar, resolviendo la ecuación 19 para  $F_w$ ,

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(7.6 \text{ m})[(72 \text{ kg})/2 + (45 \text{ kg})/3]}{9.3 \text{ m}} = 410 \text{ N.} \end{aligned}$$

Partiendo de la ecuación 17 tenemos

$$f = F_w = 410 \text{ N.}$$

**Problema muestra 4** En el problema muestra 3, el coeficiente de fricción estática  $\mu_s$  entre la escalera y el suelo es de 0.54. ¿A qué altura puede subir el bombero antes de que la escalera empiece a deslizarse?

**Solución** En el problema muestra 3 hallamos que, cuando el bombero está a medio camino hacia arriba en la escalera, la fuerza normal  $N$  es 1150 N. La fuerza máxima de fricción estática es  $f_{\text{máx}} = \mu_s N = (0.54)(1150 \text{ N}) = 620 \text{ N}$ . La fuerza real de fricción hemos hallado en ese problema era  $f = 410 \text{ N}$ , que es menor que  $f_{\text{máx}}$ . Al continuar subiendo el bombero,  $f$  aumentará, y ocurrirá un deslizamiento cuando el bombero haya subido una distancia  $d$  a lo largo de la escalera, de modo que  $f = f_{\text{máx}}$ . Deseamos hallar la distancia  $d$ .

Las fuerzas que actúan tienen la misma nomenclatura que los de la figura 7. Al aplicar la ecuación 7 en torno a un eje que pase por el punto de contacto de la escalera con el suelo, tenemos

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (mg)(a/3) + (Mg)(da/L) = 0,$$

donde  $da/L$  es la distancia horizontal entre  $O$  y la línea de acción del peso  $Mg$  del bombero. Resolviendo para  $F_w$ , hallamos

$$F_w = \frac{ga}{h} \left( M \frac{d}{L} + \frac{m}{3} \right). \quad (20)$$

La ecuación 20 nos muestra que al subir el bombero por la escalera (esto es, al aumentar  $d$ ), la fuerza  $F_w$  ejercida por la pared debe aumentar para que se mantenga el equilibrio. Para hallar a  $d$  en el punto de deslizamiento, debemos primero hallar a  $F_w$ .

La ecuación 6 del equilibrio de fuerzas en la dirección  $x$  nos da

$$\sum F_x = F_w - f = 0.$$

En el punto de deslizamiento, tendremos entonces que

$$F_w = f = f_{\max} = \mu_s N. \quad (21)$$

De la ecuación 6 para el equilibrio de fuerzas en la dirección  $y$ , tenemos

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0,$$

o sea

$$N = g(M + m). \quad (22)$$

Al combinar las ecuaciones 21 y 22, tenemos

$$F_w = \mu_s g(M + m). \quad (23)$$

Finalmente, si combinamos las ecuaciones 20 y 23 y resolvemos para  $d$ , tendremos

$$\begin{aligned} d &= L \left[ \frac{\mu_s h (M + m)}{a} - \frac{m}{3M} \right] \\ &= (12 \text{ m}) \left[ \frac{(0.54)(9.3 \text{ m}) (72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})}{7.6 \text{ m}} - \frac{45 \text{ kg}}{(3)(72 \text{ kg})} \right] \\ &= 10.4 \text{ m}. \end{aligned}$$

El bombero puede subir el 87% de la escalera antes de que comience a deslizarse.

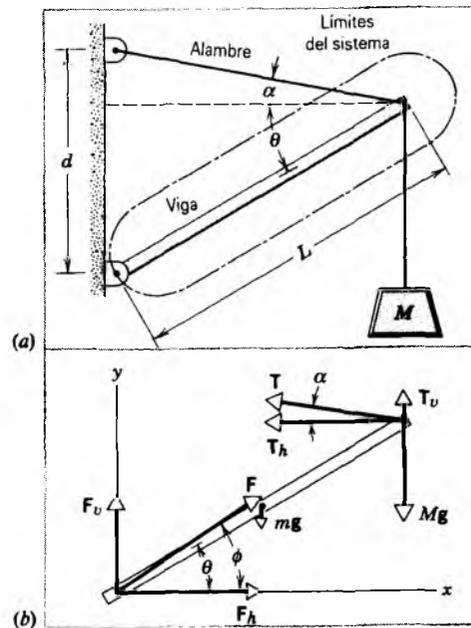
¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que permite que el bombero suba toda la escalera ( $d = L$ )? ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo necesario para hacer que la escalera no se deslice antes de que el bombero comience a subir?

**Problema muestra 5** Una viga uniforme de longitud  $L = 3.3 \text{ m}$  y masa  $m = 8.5 \text{ kg}$  está engoznada a una pared como en la figura 8a. Un alambre unido a la pared a una distancia  $d = 2.1 \text{ m}$  sobre el gozne está unido al otro extremo de la viga, siendo la longitud del alambre tal que la viga forma un ángulo de  $\theta = 30^\circ$  con la horizontal. Un cuerpo de masa  $M = 56 \text{ kg}$  está suspendido del extremo superior de la viga. Halle la tensión en el alambre y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga.

**Solución** La figura 8b muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga, la cual hemos elegido como nuestro sistema. A causa de que dos de las fuerzas están dirigidas verticalmente hacia abajo, elegimos que nuestros ejes sean horizontal y vertical. La tensión en el alambre y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga están representadas por sus componentes horizontal y vertical.

Partiendo de la ecuación 6 para el equilibrio de traslación, obtenemos

$$\sum F_x = F_h - T_h = 0, \quad (24)$$



**Figura 8** Problema muestra 5. (a) Una viga soportada por un gozne situado en el extremo inferior de una pared  $\bar{y}$  por un alambre unido a la pared en su extremo superior. Un objeto de masa  $M$  cuelga del extremo superior de la viga.

(b) Diagrama de cuerpo libre, que muestra las fuerzas que actúan sobre la viga. El gozne ejerce una fuerza  $F$  y la tensión en el alambre proporciona una fuerza  $T$ .

$$\sum F_y = F_v + T_v - mg - Mg = 0. \quad (25)$$

Para aplicar la condición del equilibrio rotatorio, elegimos un eje que pase por el extremo superior de la viga. (¿Por qué?) Según la ecuación 7, tenemos entonces

$$\sum \tau_z = -F_v(L \cos \theta) + F_h(L \sin \theta) + mg \left( \frac{L}{2} \cos \theta \right) = 0,$$

o sea

$$F_v = F_h \tan \theta + \frac{mg}{2}. \quad (26)$$

Si sustituimos los valores numéricos, las ecuaciones 24 a 26 dan por resultado

$$\begin{aligned} F_h &= T_h, \\ F_v + T_v &= 632 \text{ N}, \end{aligned}$$

y

$$F_v = (0.577)F_h + 41.7 \text{ N}.$$

Observemos que tenemos cuatro incógnitas, a saber,  $F_v$ ,  $F_h$ ,  $T_v$ , y  $T_h$ , pero sólo tres ecuaciones que las relacionen. Necesitamos otra relación entre estas cantidades si queremos resolver este problema. Esta relación final se deduce del hecho de que  $T_v$  y  $T_h$  deben de sumarse para dar un vector resultante  $\mathbf{T}$  dirigido a lo largo del alambre. El alambre (flexible) no puede soportar una fuerza transversal a su dimensión larga. [Nótese que esto no sucede así en el caso de la viga (rígida).] De aquí que nuestra cuarta ecuación sea

$$T_v = T_h \tan \alpha, \quad (27)$$

donde  $\tan \alpha = (d - L \sin \theta)/(L \cos \theta) = 0.157$ , que corresponde a  $\alpha = 8.9^\circ$ . Así nuestra cuarta ecuación resulta ser

$$T_v = 0.157 T_h.$$

Al combinar las cuatro ecuaciones hallamos que, después de llevar a cabo el álgebra necesaria,

$$F_v = 506 \text{ N}, \quad F_h = 804 \text{ N}, \quad T_v = 126 \text{ N}, \quad T_h = 804 \text{ N}.$$

La tensión en el alambre será entonces

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 814 \text{ N},$$

y la fuerza ejercida por el gozne sobre la viga es

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 950 \text{ N}.$$

Nótese que tanto  $T$  como  $F$  son considerablemente más grandes que los pesos combinados de la viga y el cuerpo suspendido (632 N).

El vector  $\mathbf{F}$  forma un ángulo con la horizontal de

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_v}{F_h} = 32.2^\circ.$$

Entonces, el vector de la fuerza resultante que actúa sobre la viga en el gozne no apunta a lo largo de la dirección de la viga.

En los ejemplos anteriores hemos tenido cuidado de limitar el número de fuerzas desconocidas al número de ecuaciones independientes que relacionan a las fuerzas. Cuando todas las fuerzas actúan en un plano, podemos tener solamente tres ecuaciones de equilibrio independientes, una para el equilibrio de rotación respecto a cualquier eje normal al plano, y las otras dos para el equilibrio de traslación en el plano. Sin embargo, a menudo tenemos más de tres fuerzas desconocidas. Por ejemplo, en los problemas muestra 3 y 4, si abandonamos la hipótesis artificial de una pared sin de fricción, tenemos cuatro cantidades escalares desconocidas, es decir, las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la escalera y la pared, y las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre la escalera en el suelo. Estas fuerzas no pueden ser determinadas porque tenemos solamente tres cantidades escalares. Al asignar cualquier valor a una fuerza desconocida, pueden determinarse las otras tres fuerzas. Pero si carecemos de una base para asignar cualquier valor particular a una fuerza desconocida, es posible, matemáticamente, un número infinito de soluciones. Por lo tanto, debe ser posible hallar otra relación independiente entre las fuerzas desconocidas si esperamos resolver el problema en forma única. (En el problema muestra 5, esta última ecuación provino de una propiedad física de uno de los elementos del sistema.) El hecho de considerar torcas respecto a un segundo eje no ofrece una cuarta ecuación independiente; podemos demostrar que tal ecuación es una combinación lineal de la primera ecuación de la torca y las dos ecuaciones de las

fuerzas, y por lo tanto no contiene ninguna información nueva.

Otro ejemplo sencillo de una estructura indeterminada ocurre cuando deseamos determinar las fuerzas ejercidas por el suelo sobre cada una de las cuatro llantas de un automóvil cuando está en reposo sobre una superficie horizontal. Si suponemos que estas fuerzas son normales al suelo, tenemos cuatro cantidades escalares desconocidas. Todas las demás fuerzas, como el peso del automóvil más los pasajeros, actúan como normales al suelo. Por lo tanto, tenemos solamente tres ecuaciones independientes que nos dan las condiciones del equilibrio, una para el equilibrio de traslación en la dirección única de todas las fuerzas y dos para el equilibrio (rotatorio) con respecto a los dos ejes perpendiculares entre sí en un plano horizontal. De nuevo, la solución del problema es matemáticamente indeterminada. Una mesa de cuatro patas, con todas ellas en contacto con el piso, es un ejemplo similar.

Desde luego, puesto que existe realmente una solución única a este problema físico, debemos hallar una base física para la relación independiente adicional entre las fuerzas que nos permita resolver el problema. La dificultad desaparece cuando pensamos que las estructuras nunca son perfectamente rígidas, como lo hemos supuesto tácitamente hasta ahora. Todas las estructuras se deforman en realidad, de alguna manera. Por ejemplo, las llantas del automóvil y el suelo se deforman, como también lo hacen la escalera y la pared. Las leyes de la elasticidad y las propiedades elásticas de la estructura determinan la naturaleza de la deformación y proporcionan la relación adicional necesaria entre las cuatro fuerzas. Por lo tanto, un análisis completo requiere no solamente de las leyes de la mecánica del cuerpo rígido sino también de las leyes de la elasticidad. En la sección 14-5 consideraremos brevemente estos temas.

---

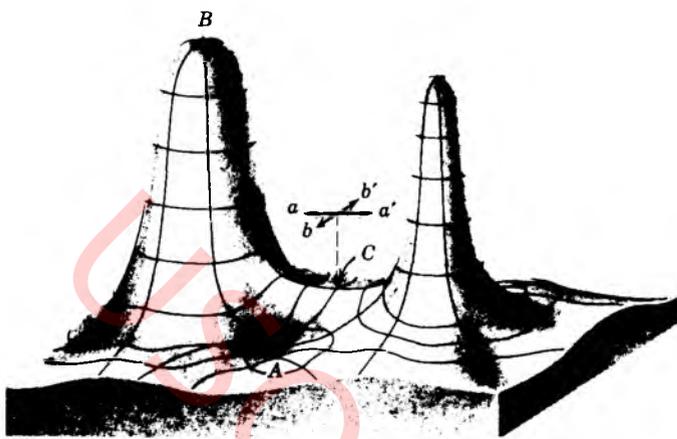
### 14-4 EQUILIBRIO ESTABLE, INESTABLE, Y NEUTRO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS EN UN CAMPO GRAVITATORIO

---

En el capítulo 8 vimos que la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa. Para las fuerzas conservativas podemos definir una función de la energía potencial  $U(x, y, z)$ , donde  $U$  se relaciona con  $\mathbf{F}$  según

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

En los puntos donde  $\partial U/\partial x$  sea cero, una partícula sometida a esta fuerza conservativa estará en equilibrio de traslación en la dirección  $x$ , ya que entonces  $F_x$  es igual a cero. En forma equivalente, en los puntos en que  $\partial U/\partial y$  o



**Figura 9** Una superficie con energía potencial gravitatoria. Una partícula que experimente la fuerza gravitatoria correspondiente se comportaría de modo similar a una partícula que se deslizara sin fricción sobre una superficie sólida real de esta forma. Una partícula situada en  $A$ ,  $B$ , o  $C$  estaría en equilibrio. El punto  $A$  representa un equilibrio estable, porque una partícula que se desplace ligeramente desde  $A$  tenderá a regresar allí. El punto  $B$  representa un equilibrio inestable, porque una partícula que se desplace ligeramente desde  $B$  tenderá a aumentar su desplazamiento. En el punto  $C$ , una partícula que se desplace a lo largo del eje  $aa'$  tenderá a regresar a  $C$ , pero si su desplazamiento fuera a lo largo del eje  $bb'$ , tendería a aumentar su desplazamiento. El punto  $C$  se llama *punto silla*, porque la superficie de esta región tiene forma parecida a una silla de montar. El equilibrio neutro, que no se ilustra, estaría representado por una superficie horizontal plana.

$\partial U/\partial z$  sean cero, una partícula estará en equilibrio de traslación en las direcciones  $y$  y  $z$ , respectivamente. La derivada de  $U$  en un punto, y la correspondiente componente de la fuerza sobre una partícula, será cero cuando  $U$  tenga un valor extremo (máximo o mínimo) en ese punto o cuando  $U$  sea constante con respecto a la coordenada variable. Entonces la partícula puede estar en equilibrio cuando  $U$  sea máxima, mínima, o constante. Consideremos, por orden, cada una de estas tres posibilidades.

Cuando  $U$  sea un *mínimo* (el punto  $A$  de la figura 9), la partícula está en equilibrio *estable*; cualquier desplazamiento desde esta posición dará por resultado una fuerza de restitución que tiende a regresar a la partícula a la posición de equilibrio. De igual forma, podemos decir que si un cuerpo está en equilibrio estable, para que cambie su posición deberá efectuarse un trabajo sobre él por un agente externo. Esto dará por resultado un aumento en su energía potencial.

Cuando  $U$  sea un *máximo* (el punto  $B$  en la figura 9), la partícula está en equilibrio *inestable*; cualquier desplazamiento desde esta posición dará por resultado una fuerza que tiende a empujar a la partícula más allá de la posición de equilibrio. En este caso, para que cambie su posi-

ción no deberá efectuarse trabajo alguno sobre la partícula por un agente externo; el trabajo efectuado para desplazar al cuerpo lo proporciona la fuerza conservativa, dando por resultado una disminución en su energía potencial.

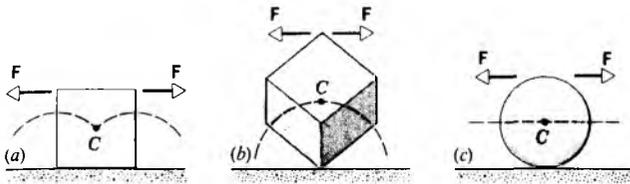
Cuando  $U$  sea una *constante*, la partícula está en equilibrio *neutro*. En este caso una partícula puede desplazarse ligeramente sin experimentar una fuerza, sea ésta repulsiva o de restauración.

Todas estas observaciones se aplican a partículas, esto es, al movimiento de traslación. Supongamos ahora que tratamos con un cuerpo rígido. Debemos considerar tanto el equilibrio rotatorio como el equilibrio de traslación. Sin embargo, el problema de un cuerpo rígido situado en un campo gravitatorio es particularmente sencillo, porque *puede considerarse que todas las fuerzas gravitatorias de las partículas del cuerpo rígido actúan en un punto, tanto para propósitos de traslación como para propósitos de rotación*. Para propósitos del equilibrio bajo fuerzas gravitatorias, podemos reemplazar al cuerpo rígido por una sola partícula en el centro de gravedad, cuya masa sea la del cuerpo.

Por ejemplo, consideremos un cubo en reposo sobre una de sus caras situado sobre una mesa horizontal. En la figura 10a se muestra al centro de gravedad en la sección transversal central del cubo. Proporcionemos una fuerza al cubo de modo que lo haga girar sin deslizamiento en torno a un eje a lo largo de una arista. Nótese que el centro de gravedad se eleva y que sobre el cubo se efectúa un trabajo, lo cual aumenta su energía potencial. Si se retira la fuerza, el cubo tiende a regresar a su posición original. Por lo tanto, esta posición inicial es la de un equilibrio *estable*. En términos de una partícula de masa equivalente situada en el centro de gravedad, este proceso se describe con la línea de puntos que indica la trayectoria seguida por el centro de gravedad durante este movimiento. Se ve que la partícula tiene una energía potencial mínima en la posición de equilibrio estable, como se requiere. Podemos concluir que el cuerpo rígido estará en equilibrio estable si la aplicación de cualquier fuerza puede elevar el centro de gravedad del cuerpo, pero no bajarlo.

Si se hace girar al cubo hasta que se equilibre sobre una esquina, como en la figura 10b, entonces el cubo estará de nuevo en equilibrio. Esta posición de equilibrio se considera *inestable*, pues la aplicación de una fuerza horizontal, aun la más leve, causaría que el cubo se cayera de esta posición con una disminución de su energía potencial. La partícula de masa equivalente en el centro de gravedad sigue la trayectoria punteada que se muestra. En la posición de equilibrio inestable esta partícula tiene una energía potencial máxima, como se requiere. Podemos concluir que el cuerpo rígido estará en equilibrio inestable si la aplicación de cualquier fuerza horizontal tiende a descender el centro de gravedad del cuerpo.

Un cubo en equilibrio sobre una de sus aristas puede considerarse en equilibrio inestable si se aplica una fuerza



**Figura 10** El equilibrio de un cuerpo extenso. (a) Un cubo que descansa sobre una mesa se halla en *equilibrio estable*, porque su centro de gravedad  $C$  se eleva cuando el cubo es volteado por una fuerza horizontal  $F$ . (b) Un cubo en equilibrio sobre una de sus esquinas se halla en *equilibrio inestable*, porque  $C$  cae cuando el cubo es ladeado por  $F$ . (c) Una esfera está en *equilibrio neutro* respecto a una fuerza horizontal, porque  $C$  no se eleva ni cae cuando se aplica  $F$ . Compárense estos criterios de equilibrio de un cuerpo extenso con los de una partícula, ilustrados en la figura 9.

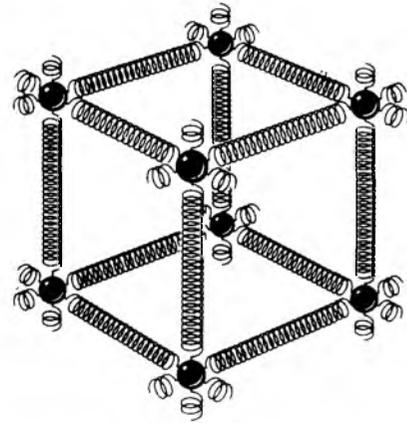
horizontal perpendicular a la arista, pero está en equilibrio estable respecto a una fuerza horizontal paralela a la arista. Así, una partícula puede estar en equilibrio estable respecto a una coordenada y en equilibrio inestable respecto a otra. Esta condición recibe el nombre de *punto silla* y corresponde al punto  $C$  de la figura 9.

El equilibrio neutro de un cuerpo rígido se ilustra mediante la esfera sobre una mesa horizontal (Fig. 10c). Si la esfera se halla sometida a una fuerza horizontal, el centro de gravedad no se eleva ni desciende, sino que se mueve a lo largo de la línea punteada horizontal. La energía potencial de la esfera es constante durante el desplazamiento, como lo es la de la partícula de masa equivalente situada en el centro de gravedad. El sistema no tiende a moverse en ninguna dirección cuando se retira la fuerza aplicada. Un cuerpo rígido estará en equilibrio neutro si la aplicación de cualquier fuerza horizontal no eleva ni baja el centro de gravedad del cuerpo.

¿En qué circunstancias estaría en equilibrio estable un cuerpo rígido *suspendido*? ¿Cuándo estaría en equilibrio inestable un cuerpo rígido *suspendido*, y cuándo estaría en equilibrio neutro?

## 14-5 ELASTICIDAD

Una mesa de tres patas es una estructura que puede analizarse mediante las técnicas de este capítulo. Las tres patas están en contacto con el suelo, el cual ejerce una fuerza normal vertical sobre cada pata. Usando una ecuación de la fuerza para el equilibrio (el peso, que actúa en el centro de gravedad, debe ser igual a la suma de las tres fuerzas normales) y dos ecuaciones de la torca (considerando torcas respecto a dos ejes perpendiculares en el plano horizontal del suelo), podemos hallar las tres fuerzas normales desconocidas a partir de tres ecuaciones.

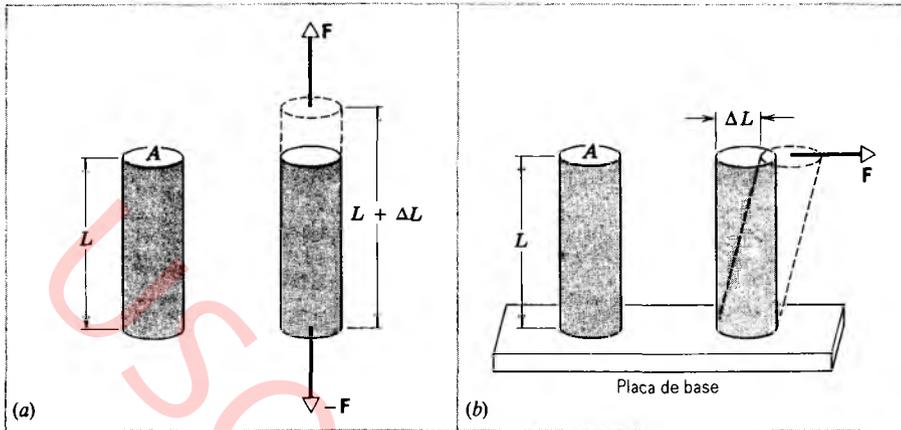


**Figura 11** Los átomos de un sólido se distribuyen en estructuras de redes tridimensionales repetitivas. Las fuerzas interatómicas se hallan representadas aquí por resortes.

Una mesa de cuatro patas, sin embargo, nos ofrece cuatro incógnitas y no puede analizarse por estas técnicas sin tener más información respecto a la relación entre las fuerzas normales. Por ejemplo, supongamos que las patas sean de longitudes ligeramente diferentes. Cuando colocamos un peso muy pesado sobre la mesa, podemos comprimir a las patas en cantidades diferentes para que las cuatro patas estén en contacto con el suelo. A partir de la compresión de las patas, podemos hallar la relación faltante entre las fuerzas que nos permita resolver el problema (véase problema muestra 8).

La rigidez de los llamados cuerpos rígidos es en realidad una ilusión. Los sólidos están compuestos de átomos que no están en contacto rígido. Los átomos no tienen superficies duras que puedan compactarse apretadamente; sus nubes de electrones pueden ser moldeadas o deformadas por fuerzas externas. En un sólido, los átomos están unidos entre sí por fuerzas que se comportan de modo muy parecido a las fuerzas de los resortes. La figura 11 muestra una representación de una parte de una *red* sólida, que es la ordenación regular de los átomos como los podríamos encontrar en un cristal. Cada átomo está en equilibrio bajo la influencia de los seis resortes que lo rodean; las constantes efectivas de los resortes son muy grandes, de modo que se necesita una gran fuerza para cambiar la separación. A esto se debe la idea de rigidez que percibimos. En otros sólidos, los átomos pueden estar ordenados en filas largas más bien que en redes cúbicas; estos materiales no son sumamente rígidos, como no lo es, por ejemplo, el hule. Cuando estiramos un material así, aplicamos la fuerza suficiente para cambiar los espacios atómicos.

Todos los cuerpos "rígidos" reales son *elásticos* hasta cierto punto, lo cual significa que podemos cambiar sus dimensiones ligeramente al jalarlos, empujarlos, torcerlos, o comprimirlos. Para formarse una idea de los órdenes de magnitud implicados, consideremos una barra de acero



**Figura 12** (a) Un cilindro, sometido a un esfuerzo de tracción, es estirado en una cantidad  $\Delta L$ . (b) Un cilindro, sometido a un esfuerzo cortante, se deforma como un monte de naipes.

de 1 m de longitud y 1 cm de diámetro. Si colgamos un automóvil del extremo de la barra, ésta se estirará, pero sólo unos 0.5 mm, ó 0.05%. Más aún, la barra retornará a su longitud original cuando se haya descolgado el automóvil.

Si colgamos dos automóviles de la misma barra, ésta se estirará permanentemente y no recuperará su longitud original cuando hayamos retirado la carga. Por otra parte, si colgamos a tres automóviles de la barra, ésta se romperá. Justo antes de la rotura, la elongación de la barra será menor del 0.2%. Aunque deformaciones como ésta parecen pequeñas, en la práctica de la ingeniería son importantes.

La figura 12 muestra dos modos en que el sólido puede cambiar sus dimensiones cuando ciertas fuerzas actúan sobre él. En la figura 12a, un cilindro es estirado. En la figura 12b, el cilindro es deformado por las llamadas fuerzas cortantes, como podría deformarse un monte de naipes o un libro. (Un tercer modo es la compresión uniforme, la cual resulta de la aplicación de las fuerzas uniformemente en todas direcciones. En el capítulo 17 consideraremos la compresión uniforme). Los tres modos tienen en común que existe un *esfuerzo*, que se relaciona con las fuerzas aplicadas, y existe también una *deformación* de alguna clase.

El esfuerzo y la deformación adquieren formas diferentes en los casos de la figura 12 pero, en lo que respecta a la práctica diaria de la ingeniería, son proporcionales entre sí. La constante de proporcionalidad se llama *módulo de elasticidad*. Así pues,

$$\text{esfuerzo} = \text{módulo} \times \text{deformación} \quad (28)$$

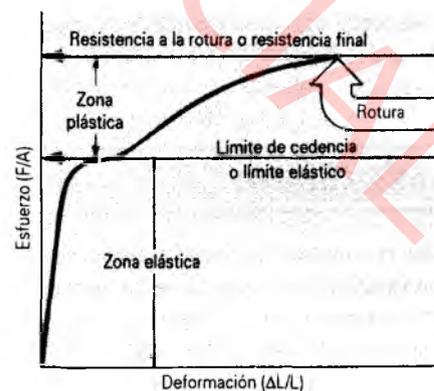
La figura 13 muestra la relación entre el esfuerzo y la deformación para cilindros de prueba de acero tal como el de la figura 14. Para una parte sustancial de la gama de esfuerzos aplicados, la curva esfuerzo-deformación es lineal y tiene aplicación la ecuación 28, con un módulo constante (correspondiente a la porción lineal de la figura 13). Al continuar creciendo el esfuerzo, la relación

esfuerzo-deformación puede ser no lineal, pero el material permanece elástico: es decir, si se retira el esfuerzo, la muestra retorna a sus dimensiones originales.

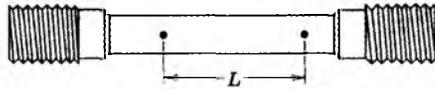
Si el esfuerzo aumenta más allá del *límite de cedencia* o *límite elástico* del material, la muestra sufre un cambio permanente y no recupera sus dimensiones originales cuando se haya retirado el esfuerzo; esta clase de comportamiento se llama *plasticidad*. Más allá de la elasticidad o cedencia sucede, inevitablemente, la rotura, la cual se da tras un esfuerzo llamado *resistencia a la rotura* o *resistencia final*.

### Tensión y compresión

Para un estiramiento o una compresión simples, el esfuerzo se define como  $F/A$ , la fuerza dividida por el área sobre la que actúa, y la deformación se define como la cantidad sin dimensiones  $\Delta L/L$ , la fracción de cambio de longitud de la muestra. Si la muestra es una barra larga, nótese que no sólo toda la barra sino también cualquier sección de



**Figura 13** Curva de esfuerzo-deformación de una muestra de prueba de acero, tal como la de la figura 14. La muestra de prueba se deforma permanentemente cuando el esfuerzo es igual al *límite de cedencia* del material. Se romperá cuando el esfuerzo sea igual a la *resistencia a la rotura* del material.



**Figura 14** Una muestra de prueba, usada para determinar la curva de esfuerzo-deformación como la de la figura 13.

ella experimenta la misma deformación cuando se le aplica un esfuerzo determinado. Puesto que el esfuerzo no tiene dimensiones, en la ecuación 28 el módulo tiene las mismas dimensiones que el esfuerzo, es decir, fuerza por unidad de área.

El módulo de los esfuerzos de tensión y de compresión se llama *módulo de Young*, y en la práctica de la ingeniería se representa mediante el símbolo  $E$ . La ecuación 28 se convierte en

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

o bien

$$\Delta L = \frac{FL}{EA} \quad (29)$$

En una muestra a menudo puede medirse la deformación  $\Delta L/L$  convenientemente por medio de un *medidor de deformación*; véase la figura 15. Estos aparatos sencillos y útiles, que pueden colocarse directamente en la máquina en operación con adhesivos, se basan en el principio de que la resistencia eléctrica de alambres hechos de ciertos materiales es una función de la deformación del alambre.

Aunque el módulo puede ser el mismo tanto para la compresión como para la tensión, la *resistencia a la rotura* puede ser distinta en ambos casos. Por ejemplo, el concreto es muy resistente a la compresión, pero tan débil a la tensión que casi nunca se usa de esta manera en la práctica de la ingeniería. La tabla 1 muestra los valores del módulo de Young y otras propiedades elásticas de algunos materiales de interés en ingeniería.

**TABLA 1** ALGUNAS PROPIEDADES ELÁSTICAS DE MATERIALES SELECTOS DE INTERÉS EN INGENIERÍA

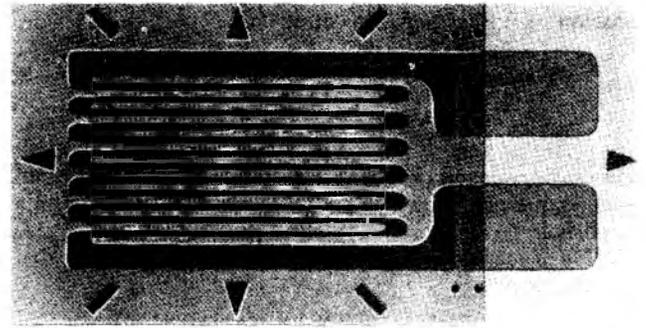
Material	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Módulo de Young (10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup> )	Límite de resistencia (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )	Límite de cedencia (10 <sup>6</sup> N/m <sup>2</sup> )
Acero <sup>†</sup>	7860	200	400	250
Aluminio	2710	70	110	95
Vidrio	2190	65	50 <sup>‡</sup>	—
Concreto <sup>‡</sup>	2320	30	40 <sup>‡</sup>	—
Madera <sup>†</sup>	525	13	50 <sup>‡</sup>	—
Hueso	1900	9 <sup>‡</sup>	170 <sup>‡</sup>	—
Poliestireno	1050	3	48	—

<sup>†</sup> Acero estructural (ASTM-A 36).

<sup>‡</sup> Alta resistencia.

<sup>‡</sup> En compresión.

<sup>†</sup> Pino.



**Figura 15** Medidor de deformación, cuyas dimensiones son 9.8 mm por 4.6 mm. El medidor se fija con un adhesivo al objeto cuya deformación va a medirse. La resistencia eléctrica del medidor varía con el esfuerzo, permitiendo medir deformaciones hasta de un 3%.

### Esfuerzo cortante

En el caso del esfuerzo cortante, el esfuerzo es también una fuerza por unidad de área pero el vector de fuerza está en el plano del área en lugar de formar un ángulo recto con ella. Una vez más la deformación es una razón sin dimensiones  $\Delta L/L$  estando las cantidades definidas como se muestra en la figura 12b. El módulo que se indica con el símbolo  $G$  en la práctica de la ingeniería, recibe el nombre de *módulo del esfuerzo cortante*. La ecuación 29 se aplica a los esfuerzos cortantes, siendo el módulo  $E$  reemplazado por el módulo  $G$ .

Los esfuerzos cortantes juegan un papel esencial en las flechas que giran bajo carga, en las fracturas de huesos provocados por torceduras, y en los resortes.

**Problema muestra 6** Una barra de acero estructural tiene un radio  $R$  de 9.5 mm y una longitud  $L$  de 81 cm. Se le estira axialmente con una fuerza  $F$  de  $6.2 \times 10^4$  N (unas 7 ton). (a) ¿Cuál es el esfuerzo en la barra? (b) ¿Cuál es el alargamiento de la barra bajo esta carga?

**Solución** (a) El esfuerzo se define de

$$\begin{aligned}\text{stress} &= \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6.2 \times 10^4 \text{ N}}{(\pi)(9.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2} \\ &= 2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2.\end{aligned}$$

El límite de cedencia del acero estructural es de  $2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ , de modo que esta barra está peligrosamente cerca de su límite de cedencia.

(b) De la ecuación 29, usando el resultado que hemos calculado, obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta L &= \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2)(0.81 \text{ m})}{2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2} \\ &= 8.9 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.89 \text{ mm}.\end{aligned}$$

Así, la deformación  $\Delta L/L$  es  $(8.9 \times 10^{-4} \text{ m})/(0.81 \text{ m})$ , lo cual es  $1.1 \times 10^{-3}$ , o sea 0.11%.

**Problema muestra 7** El fémur, que es el hueso primordial del muslo, tiene un diámetro mínimo de unos 2.8 cm en un hombre adulto, lo cual corresponde a una sección transversal  $A$  de  $6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ . ¿Con qué carga de compresión se rompería?

**Solución** De la tabla 1 vemos que la resistencia de la rotura  $S_u$  del hueso sujeto a compresión es de  $170 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ . La fuerza de compresión es, entonces,

$$\begin{aligned}F &= S_u A = (170 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(6 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \\ &= 1.0 \times 10^5 \text{ N}.\end{aligned}$$

Lo que significa 23,000 lb, unas 11 ton. Aunque se trata de fuerza grande, ésta puede presentarse durante, por ejemplo, un mal aterrizaje en paracaídas sobre terreno firme. La fuerza no necesita ser prolongada; unos cuantos milisegundos bastarían.

Ahora estamos preparados para comprender cómo nos pueden ayudar las propiedades elásticas de los materiales a determinar sus condiciones de equilibrio, como lo sugiere el siguiente problema muestra.

**Problema muestra 8** Una mesa de cuatro patas tiene tres de ellas de longitud  $D = 1.00 \text{ m}$ ; la cuarta es más larga por una pequeña distancia  $d = 0.50 \text{ mm}$ , de modo que la mesa se bambolea ligeramente. Sobre la mesa se coloca verticalmente un pesado cilindro de acero, cuya masa  $M$  es de 290 kg, de modo

que las cuatro patas se comprimen y la mesa ya no se tambalea. Cada pata es un cilindro de madera cuya área de sección transversal  $A$  es  $1.0 \text{ cm}^2$ . El módulo de Young  $E$  para la madera es de  $1.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ . Supóngase que el tablero de la mesa permanece a nivel y que las patas no se pandean. ¿Con qué fuerza empujará el suelo contra cada pata?

**Solución** Consideremos al tablero de la mesa como nuestro sistema. Si el tablero permanece a nivel, cada una de las tres patas cortas debe comprimirse en la misma cantidad  $\Delta L_3$ , con la misma fuerza  $F_3$ . La única pata larga debe comprimirse en una cantidad mayor  $\Delta L_1$ , por una fuerza  $F_1$ , y debemos tener

$$\Delta L_3 + d = \Delta L_1.$$

De la ecuación 29 ( $\Delta L = FL/EA$ ), podemos escribir esta relación así:

$$F_3 D + dAE = F_1(D + d) \approx F_1 D, \quad (30)$$

donde despreciamos a  $d$  en comparación con  $D$  en el último término. De la ecuación 6 para el equilibrio de las fuerzas en la dirección vertical, tenemos

$$\sum F_y = 3F_3 + F_1 - Mg = 0. \quad (31)$$

Si resolvemos las ecuaciones 30 y 31 para las fuerzas desconocidas, hallamos

$$\begin{aligned}F_3 &= \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4D} \\ &= \frac{(290 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{4} \\ &\quad - \frac{(5.0 \times 10^{-4} \text{ m})(10^{-4} \text{ m}^2)(1.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)}{(4)(1.00 \text{ m})} \\ &= 711 \text{ N} - 163 \text{ N} = 548 \text{ N}.\end{aligned}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{Mg}{4} + \frac{3dAE}{4D} \\ &= 711 \text{ N} + 489 \text{ N} = 1200 \text{ N}.\end{aligned}$$

Usted puede demostrar que, para llegar a su configuración de equilibrio, las tres patas cortas se comprimieron en 0.42 mm cada una, y la única pata larga en 0.92 mm, siendo la diferencia 0.50 mm, como se esperaba.

El cilindro debe colocarse situado más cerca de la pata larga que de cualquiera de las tres patas más cortas si el tablero ha de permanecer horizontal. Puede usarse la condición de equilibrio de las torcas para hallar su posición, si conocemos las dimensiones del tablero y la colocación de sus patas.

## PREGUNTAS

- ¿Son ambas ecuaciones 1 y 3 condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio mecánico? ¿Para el equilibrio estático?
- ¿Está en equilibrio una bola de béisbol en el instante en que llega al reposo en la cima de un disparo vertical?
- En un péndulo simple, ¿está el disco en equilibrio en cualquier punto de su balanceo? Si es así, ¿dónde?
- Una rueda que gira a una velocidad angular constante  $\omega$  respecto a un eje fijo está en equilibrio mecánico porque no actúa sobre ella una fuerza externa neta o una torca. Sin

embargo, las partículas que conforman la rueda experimentan una aceleración centrípeta  $a$  dirigida hacia el eje. Puesto que  $a \neq 0$ , ¿cómo podemos decir que la rueda está en equilibrio?

5. Dé varios ejemplos de un objeto que no esté en equilibrio aun cuando la resultante de todas las fuerzas que actúen sobre él sea cero.
6. ¿Coinciden el centro de masa y el centro de gravedad en un edificio? ¿Y en un lago? ¿Bajo qué condiciones resulta insignificante la diferencia entre el centro de masa y el centro de gravedad? Dé un ejemplo.
7. Si un cuerpo rígido es arrojado al aire sin darle un giro, no girará durante su vuelo, siempre que la resistencia del aire pueda despreciarse. ¿Qué implica este simple resultado respecto a la ubicación del centro de gravedad?
8. La gimnasta olímpica Mary Lou Retton realizó algunos ejercicios admirables en las barras paralelas asimétricas. Un amigo le dice a usted que un análisis cuidadoso de las películas de sus proezas demuestra que, no importa lo que haga, su centro de masa está arriba de su(s) punto(s) de apoyo en todo momento, como lo exigen las leyes de la física. Comente la afirmación de su amigo.
9. ¿Qué es más probable que se rompa con el uso: una hamaca fuertemente estirada entre dos árboles o una que se combe un poco? Explique su respuesta.
10. Una escalera de mano está en reposo con su extremo superior contra una pared y su extremo inferior sobre el suelo. ¿Es más probable que se resbale cuando alguien está parado sobre ella en la parte más baja o en la parte más alta? Explique.
11. Un libro reposa sobre una mesa. La mesa lo empuja hacia arriba con una fuerza precisamente igual al peso del libro. En términos poco formales, ¿cómo "sabe" la mesa qué fuerza hacia arriba debe proporcionar? ¿Cuál es el mecanismo por el cual entra en juego esta fuerza? (Véase "The Smart Table", por Earl Zwicker, *The Physics Teacher*, diciembre de 1981, pág. 633.)
12. Póngase de pie frente al borde de una puerta abierta, con un pie a cada lado de ella. Hallará que no le es posible estar parado sobre las puntas de los pies. ¿Por qué?
13. Siéntese en una silla de respaldo recto y trate de ponerse de pie sin inclinarse hacia el frente. ¿Por qué no puede hacerlo?
14. Una barra larga le ayuda a un equilibrista a mantener el equilibrio. ¿Cómo?
15. Un bloque compuesto hecho de madera y metal descansa sobre una mesa. ¿En qué orientación de las dos mostradas en la figura 16 puede usted volcarlo con la menor fuerza?
16. En el problema muestra 5, ¿por qué no es necesario considerar la fricción en el gozne?
17. Un cuadro está colgado de una pared por dos alambres. ¿Qué orientación deben tener los alambres para soportar una tensión mínima? Explique cómo es posible el equilibrio con cualquier número de orientaciones y tensiones, aun cuando el cuadro tenga una masa definida.

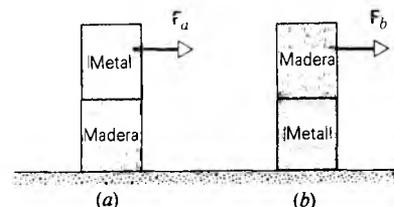


Figura 16 Pregunta 15.

18. Demuestre cómo usar una báscula de resorte para pesar objetos bastante más allá de la lectura máxima de la báscula.
19. Explique, usando fuerzas y torcas, cómo un árbol puede mantener el equilibrio en un vendaval.
20. Un virus en un tubo lleno de líquido de una centrifuga que está en movimiento circular uniforme (es decir, en movimiento *acelerado*) como lo ve un observador en el laboratorio. Sin embargo, un observador que girara con la centrifuga declararía que el virus no está *acelerado*. Explique cómo puede estar el virus en equilibrio para este segundo observador pero no para el primero.
21. Un bloque uniforme, en forma de paralelepípedo rectangular de lados en la razón 1:2:3, se halla sobre una superficie horizontal. ¿En qué posición, en caso de que haya alguna, es decir, sobre cuál de sus tres caras, puede decirse que es más estable?
22. ¿Existe algún cuerpo que sea realmente rígido? Si existe, dé un ejemplo. Si no, explique por qué.
23. Usted está sentado en el asiento del conductor de un automóvil estacionado. Se le dice que las fuerzas ejercidas hacia arriba por el suelo sobre cada una de las cuatro llantas son diferentes. Exponga los factores que deben considerarse para formar esta afirmación como cierta o no.
24. En el problema muestra 3, si la pared no estuviese carente de fricción, ¿nos proporcionarían las leyes empíricas de la fricción una condición extra necesaria para determinar la fuerza (vertical) extra ejercida por la pared sobre la escalera?
25. Cuando el cilindro de prueba de la figura 14 se estira bajo el esfuerzo aplicado se hace más larga. ¿Qué cambio, si lo hay, esperaría usted en el diámetro del cilindro?
26. ¿Es el módulo de Young para el hule mayor o menor que el módulo de Young para el acero? Según este criterio, ¿es más elástico el hule que el acero?
27. Una viga horizontal apoyada en ambos extremos está cargada en el centro. Demuestre que la parte superior de la viga está bajo compresión mientras que la parte inferior está bajo tensión.
28. ¿Por qué se usan varillas de refuerzo en las estructuras de concreto? (Compare la resistencia a la tensión del concreto con su resistencia a la compresión.)

**PROBLEMAS**

**Sección 14-1 Condiciones de equilibrio**

- Una familia de ocho miembros, cuyos pesos en libras se indican en la figura 17, se halla en equilibrio en un balancín de sube y baja. ¿Cuál es el número que corresponde a la persona que produce la torca más grande, respecto al punto de pivoteo, dirigido (a) hacia afuera de la página y (b) hacia adentro de la página?

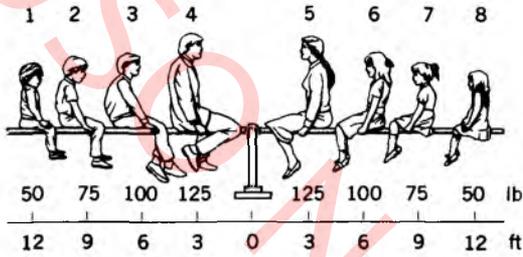


Figura 17 Problema 1.

- Tres fuerzas actúan sobre un objeto cuadrado rígido de peso despreciable jalando en sus esquinas como se muestra, a escala, en la figura 18. (a) ¿Se satisface la primera condición del equilibrio? (b) ¿Se satisface la segunda condición del equilibrio? (c) Si alguna de las respuestas precedentes es negativa, ¿podría una cuarta fuerza restituir el equilibrio del objeto? Si es así, especifique la magnitud, dirección, y punto de aplicación de la fuerza necesaria.

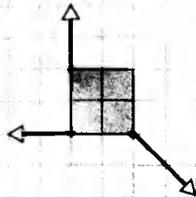


Figura 18 Problema 2.

- Demuestre que cuando actúan solamente tres fuerzas sobre un objeto en equilibrio, deben ser coplanares y sus líneas de acción deben encontrarse en un punto o ser paralelas.

**Sección 14-3 Ejemplos de equilibrio**

- Se sabe que cierta nuez requiere, para romperse, fuerzas de 46 N ejercidas sobre ella en ambos lados. ¿Qué fuerzas  $F$  se requerirán cuando esté colocada en el cascanueces mostrado en la figura 19?

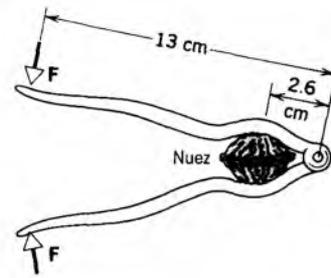


Figura 19 Problema 4.

- La torre inclinada de Pisa (véase la figura 20) tiene 55 m de altura y 7.0 m de diámetro. La parte superior de la torre se desplaza 4.5 m de la vertical. Considerando a la torre como un cilindro uniforme, circular, (a) ¿qué desplazamiento adicional, medido en la parte superior, llevará a la torre a un vuelco inminente? (b) ¿Qué ángulo con la vertical formará la torre en ese momento? (La razón de movimiento actual de la parte superior es de 1 mm/año.)



Figura 20 Problema 5.

- Un cubo descansa en reposo sobre una mesa horizontal cuando se le aplica una pequeña fuerza horizontal perpendicular y en el centro de una arista de la parte superior. La fuerza aumenta ahora uniformemente. ¿Qué le ocurrirá al cubo primero, se deslizará o se volcará? El coeficiente de fricción estática entre las superficies es igual a 0.46.
- Un guacal en forma de cubo de 1.12 m contiene una pieza de maquinaria cuyo diseño es tal que el centro de gravedad del guacal y de su contenido está situado a 0.28 m sobre su centro geométrico. El guacal descansa sobre una rampa que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Al aumentar  $\theta$  desde cero, se llegará a un ángulo en el cual el guacal o bien comenzará a deslizarse hacia abajo o bien se volcará.

Cuál de estos fenómenos sucederá si el coeficiente de fricción estática es (a)  $\mu 0.60$ ? (b)  $\mu 0.70$ ? En cada caso dé el ángulo en el cual ocurre el fenómeno.

8. Una cadena flexible de peso  $W$  cuelga entre dos puntos fijos,  $A$  y  $B$ , situados en el mismo nivel, como lo muestra la figura 21. Halle (a) la fuerza ejercida por la cadena sobre cada punto extremo y (b) la tensión en la cadena en el punto más bajo.



Figura 21 Problema 8.

9. En la figura 22 un hombre trata de sacar a su automóvil del lodo en el borde de una carretera. Ata fuertemente un extremo de una cuerda alrededor de la defensa delantera y el otro extremo alrededor de un poste de teléfonos que está a una distancia de 62 ft de la defensa. Luego empuja de lado a la cuerda en su punto medio con una fuerza  $F = 120$  lb, desplazando el centro de la cuerda 1.5 ft de su posición previa, y el automóvil comienza a moverse. Halle la fuerza ejercida por la cuerda sobre el automóvil. (La cuerda se estira un tanto bajo la tensión.)

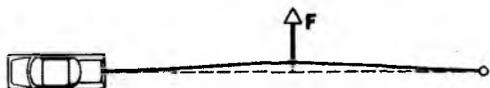


Figura 22 Problema 9.

10. Una esfera uniforme de peso  $w$  y radio  $r$  está sostenida mediante una cuerda amarrada a una pared sin fricción a una distancia  $L$  medida desde el centro de la esfera, como se ilustra en la figura 23. Halle (a) la tensión en la cuerda y (b) la fuerza ejercida sobre la esfera por la pared.
11. Un automóvil estacionado de 1360 kg de masa tiene una base de ruedas (distancia entre el eje delantero y el trasero) de 305 cm. Su centro de gravedad está ubicado a 178 cm detrás del eje delantero. Determine (a) la fuerza hacia arriba ejercida por el suelo contra una de las dos ruedas delanteras (se suponen iguales) y (b) la fuerza hacia arriba que el suelo ejerce contra cada una de las dos ruedas traseras (se suponen iguales).
12. Una persona de 160 lb de peso camina por un puente nivelado y se detiene a más de tres cuartas partes de la distancia desde un extremo del puente. Éste es uniforme y pesa 600 lb. ¿Cuáles son los valores de las fuerzas verticales que los soportes ejercen sobre cada extremo del puente por sus apoyos?
13. Una clavadista de 582 N de peso está de pie sobre el extremo de un trampolín uniforme de 4.48 m de longitud,

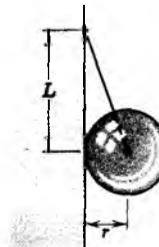


Figura 23 Problema 10.

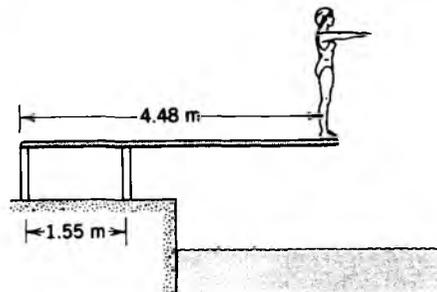


Figura 24 Problema 13.

- sujeto por dos pedestales entre los cuales hay una separación de 1.55 m, como se ilustra en la figura 24. Halle la tensión (o compresión) en cada uno de los dos pedestales.
14. Una barra de un metro se balancea sobre el borde de un cuchillo en la marca de 50.0 cm. Cuando se colocan dos monedas sobre la marca de 12.0 cm, se encuentra que la barra cargada se equilibra en la marca de 45.5 cm. Cada moneda tiene una masa de 5.00 g. Halle la masa de la barra.
15. Una viga es transportada por tres obreros, uno en un extremo y los otros dos soportando la viga entre ellos sobre un travesaño situado de modo tal que la carga se reparte igualmente entre los tres. Halle dónde está colocado el travesaño. Desprecie la masa del travesaño
16. Un limpiador de ventanas de 74.6 kg usa una escalera de mano de 10.3 kg que tiene 5.12 m de largo. Sitúa un extremo a 2.45 m de una pared y descansa la parte superior contra una ventana cuyos vidrios están quebrados y sube por la escalera. Cuando llega a 3.10 m se rompe la ventana. Despreciando la fricción entre la escalera y la ventana y suponiendo que la base de la escalera no se desliza, halle (a) la fuerza ejercida sobre la ventana por la escalera justo antes de que se rompa la ventana y (b) la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre la escalera por el suelo justo antes de que se rompa la ventana.
17. La figura 25 muestra las estructuras anatómicas de la pierna y el pie que intervienen cuando se levanta del suelo el talón de modo que el pie haga en efecto contacto con el suelo en un solo punto, mostrado como  $P$  en la figura. Calcule las fuerzas que deben ejercerse sobre el pie por el músculo de la pantorrilla y por los huesos de la pierna cuando una persona de 65 kg se para de puntillas sobre un pie. Compare estas fuerzas con el peso de la persona. Suponga que  $a = 5.0$  cm y  $b = 15$  cm.

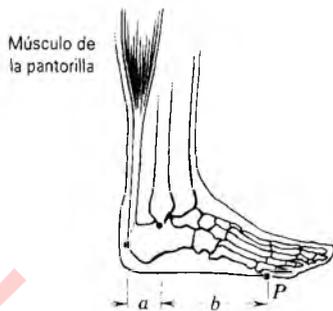


Figura 25 Problema 17.

18. Dos esferas uniformes e idénticas, sin fricción, cada una con un peso  $W$ , descansan como se muestra en la figura 26 en el fondo de un recipiente rectangular, fijo. La línea que une los centros de las esferas forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Halle las fuerzas ejercidas sobre las esferas (a) por el fondo del recipiente, (b) por los costados del recipiente, y (c) una contra la otra.

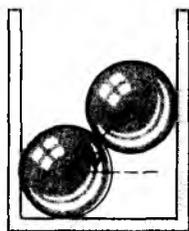


Figura 26 Problema 18.

19. ¿Qué fuerza mínima  $F$ , aplicada horizontalmente en el eje de la rueda de la figura 27, es necesaria para elevar la rueda sobre un obstáculo de altura  $h$ ? Tome  $r$  como el radio de la rueda y  $W$  como su peso.

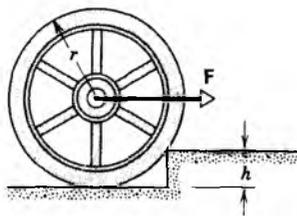


Figura 27 Problema 19.

20. Una balanza está hecha de una barra rígida que puede girar libremente en torno a un punto que no está en el centro de la barra. Se equilibra con pesas desiguales situadas en los platillos a cada extremo de la barra. Cuando se coloca un objeto de masa desconocida  $m$  en el platillo del lado izquierdo, se equilibra con un objeto de masa  $m_1$  colocado en el platillo del lado derecho, y de igual modo cuando el objeto de masa  $m$  se coloca en el platillo del lado derecho, se equilibra con un objeto de masa

$m_2$  colocado en el platillo del lado izquierdo. Demuestre que

$$m = \sqrt{m_1 m_2}.$$

21. Una esfera uniforme de peso  $w$  está en reposo encajada entre dos planos inclinados de ángulos de inclinación  $\theta_1$  y  $\theta_2$  (Fig. 28). (a) Suponga que no existe fricción y determine las fuerzas (direcciones y magnitudes) que los planos ejercen sobre la esfera. (b) ¿Qué cambio habría, en principio, si se tomase en cuenta la fricción?

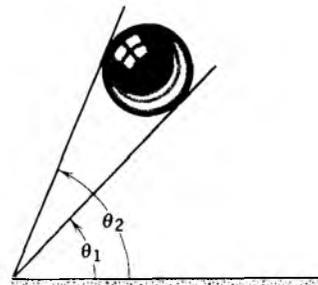


Figura 28 Problema 21.

22. Un objeto de 15.4 kg es levantado por el sistema de poleas que se muestra en la figura 29. El brazo está vertical, mientras que el antebrazo forma un ángulo de  $27.0^\circ$  con la horizontal. ¿Qué fuerzas se ejercen en el antebrazo por (a) el músculo tríceps y (b) el hueso del brazo (el húmero)? El antebrazo y la mano juntos tienen una masa de 2.13 kg con el centro de masa a 14.7 cm (medidos a lo largo del brazo) desde el punto en que los dos huesos están en contacto. El músculo tríceps jala verticalmente hacia arriba en un punto situado a 2.50 cm detrás del punto de contacto.

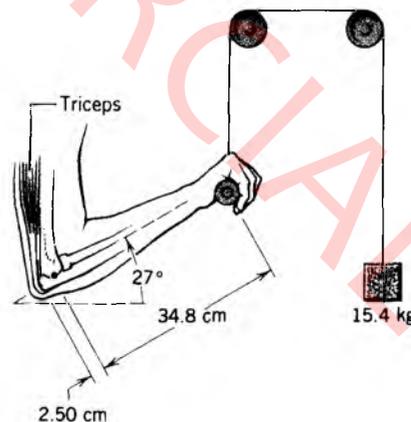


Figura 29 Problema 22.

23. Un letrero cuadrado uniforme, de 52.3 kg, y 1.93 m de lado, está colgado de una barra de 2.88 m de masa despreciable. Un cable está unido al extremo de la barra y a un

punto en la pared a 4.12 m sobre el punto en que la barra se halla fija a la pared, como se muestra en la figura 30. (a) Halle la tensión en el cable. (b) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la pared sobre la barra.

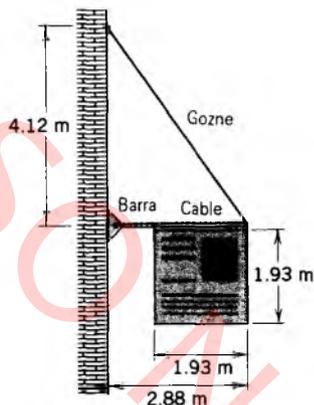


Figura 30 Problema 23.

24. Una puerta de ventilación cuadrada colocada en un techo tiene 3.0 ft (= 0.91 m) de lado y pesa 25 lb (masa = 11 kg), está embisagrada en un lado y tiene un pestillo o cerradura en el lado opuesto. Si el centro de gravedad de la puerta está a 4.0 in (= 10 cm) del centro de la puerta y más cercana al lado embisagrado, ¿qué fuerzas deben sostener (a) el pestillo y (b) las bisagras?
25. Un extremo de una viga uniforme que pesa 52.7 lb y tiene 3.12 ft de longitud está unido a un muro por medio de un gozne. El otro extremo está soportado por un alambre que forma ángulos iguales de  $27.0^\circ$  con la viga y el muro (véase la Fig. 31). (a) Halle la tensión en el alambre. (b) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza en el gozne.

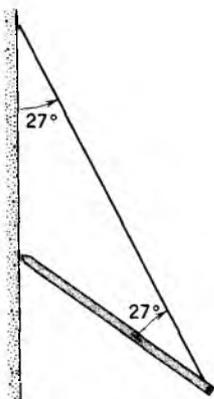


Figura 31 Problema 25

26. Una puerta de 2.12 m de altura y 0.907 m de anchura tiene una masa de 26.8 kg. Una bisagra situada a 0.294 m del extremo superior y otra situada a 0.294 m del extremo

inferior sostienen cada una la mitad del peso de la puerta. Suponga que el centro de gravedad está en el centro geométrico de la puerta y determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre cada bisagra por la puerta.

27. El sistema mostrado en la figura 32 está en equilibrio. El objeto que cuelga del extremo de la armadura S pesa 513 lb y la propia armadura pesa 107 lb. Halle (a) la tensión en el cable C y (b) las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la armadura por el pivote P.

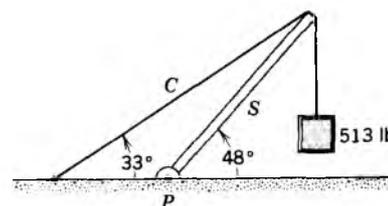


Figura 32 Problema 27.

28. Una barra no uniforme de peso  $W$  está suspendida en reposo en una posición horizontal por dos cuerdas delgadas como se muestra en la figura 33; el ángulo que forma una cuerda con la vertical es  $\theta$ , la otra cuerda forma ángulo  $\phi$  con la vertical. La longitud de la barra es  $L$ . Halle la distancia  $x$  desde el extremo izquierdo hasta el centro de gravedad.

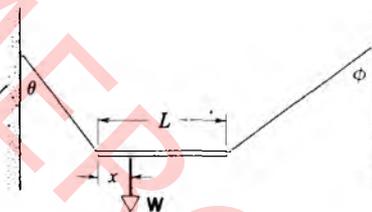


Figura 33 Problema 28.

29. Una barra horizontal delgada AB de peso despreciable y longitud  $L$  está pivotada a un muro vertical en A y soportada en B por un alambre delgado BC que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. A lo largo de la barra, un peso  $W$  puede moverse en cualquier dirección según se defina por la distancia  $x$  desde el muro (Fig. 34). (a) Halle la tensión  $T$  en el alambre delgado en función de  $x$ . Halle (b) la componente horizontal y (c) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre la barra por el pivote en A.
30. En la figura 34, la longitud  $L$  de la barra es 2.76 m y su peso  $w$  es de 194 N. También,  $W = 315$  N y  $\theta = 32.0^\circ$ . El alambre puede soportar una tensión máxima de 520 N. (a) ¿Cuál es la distancia máxima  $x$  posible antes de que el alambre se rompa? (b) Con  $W$  situada en esta  $x$  máxima, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la barra por el pivote?

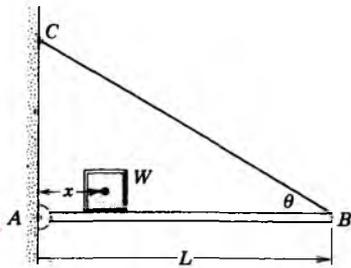


Figura 34 Problemas 29 y 30.

31. Dos vigas uniformes están unidas a una pared con goznes y luego empernadas juntas con holgura como en la figura 35. Halle las componentes horizontal y vertical de (a) la fuerza sobre cada gozne y (b) la fuerza ejercida por el perno sobre cada viga.

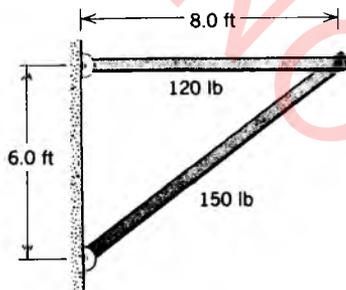


Figura 35 Problema 31.

32. Una plancha de 274 N, de longitud  $L = 6.23$  m, descansa sobre el suelo y sobre un rodillo sin fricción situado en la parte superior de un muro de altura  $h = 2.87$  m (véase la Fig. 36). El centro de gravedad de la plancha está en su centro. La plancha permanece en equilibrio para cualquier valor de  $\theta \geq 68.0^\circ$  pero se resbala si  $\theta < 68.0^\circ$ . Halle el coeficiente de fricción estática entre la plancha y el suelo.
33. En la escalera de tijera que se muestra en la figura 37, AC y CE tienen 8.0 ft de longitud y están embisagradas en C. BD es una barra de enlace de 2.5 ft de longitud a la mitad de la escalera. Un hombre que pesa 192 lb sube 6.0 ft por la escalera. Suponiendo que el suelo carezca de fricción y despreciando el peso de la escalera, halle (a) la tensión en la barra de enlace y (b) las fuerzas ejercidas sobre la escalera por el suelo. (Sugerencia: Será de ayuda aislar partes de la escalera al aplicar las condiciones del equilibrio.)
34. En el marco cuadrado ABCD que se representa en la figura 38 se produce una tensión T en la barra AB por medio de un tensor de tornillo G. Determine las fuerzas que se producen en las otras barras. Las diagonales AC y BD pasan libremente sobre sí mismas en E. Las consideraciones de simetría pueden conducir a una simplificación considerable en éste y en problemas similares.
35. Una caja cúbica está llena de arena y pesa 892 N. Se desea que la caja "ruede" empujándola horizontalmente en uno de los bordes superiores. (a) ¿Qué fuerza mínima se re-

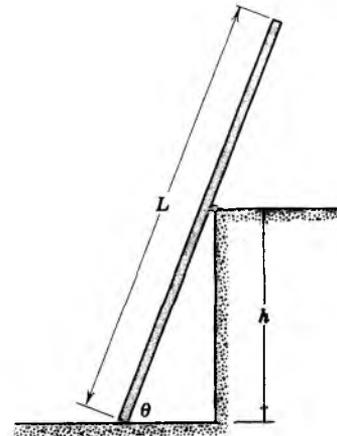


Figura 36 Problema 32.

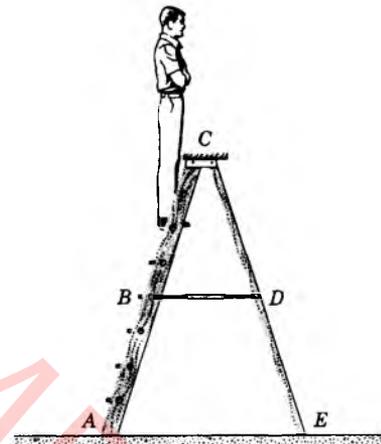


Figura 37 Problema 33.

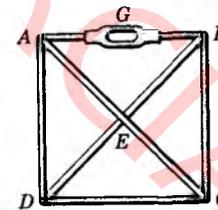


Figura 38 Problema 34.

- quiere? (b) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se requiere? (c) ¿Hay una manera más eficiente de hacer que la caja ruede? De ser así, halle la menor fuerza posible que debería aplicarse directamente a la caja.
36. Un automóvil hace una parada de emergencia en una carretera horizontal accionando los frenos de modo que las cuatro ruedas se traban y el auto patina a lo largo de la carretera. El coeficiente de fricción cinética entre las llantas y la carretera es de 0.40. La separación entre los ejes delantero y trasero es de 4.20 m, y el centro de masa

del automóvil se localiza a 1.80 m atrás del eje delantero y a 0.750 m sobre la carretera; véase la figura 39. El automóvil pesa 11.0 kN, con su ocupante. Calcule (a) la deceleración por el frenado del automóvil, (b) la fuerza normal en cada rueda delantera y trasera, y (c) la fuerza de frenado en cada rueda delantera y trasera. (Sugerencia: Aunque el automóvil no esté en equilibrio de traslación, está en equilibrio rotatorio.)

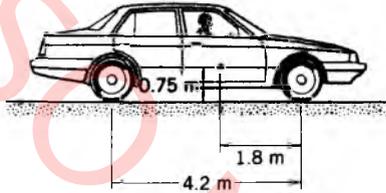


Figura 39 Problema 36.

37. Un problema muy conocido es el siguiente (véase, por ejemplo, *Scientific American*, noviembre de 1964, pág. 128). Se colocan ladrillos uniformes uno sobre otro de manera que tengan el salidizo máximo. Esto se logra haciendo que el centro de gravedad del ladrillo de arriba esté directamente sobre el borde del ladrillo que está debajo, que el centro de gravedad de los dos ladrillos de arriba combinados esté directamente sobre el borde del tercer ladrillo desde arriba, y así sucesivamente. (a) Justifique este criterio del máximo salidizo; halle los salidizos en equilibrio más grandes para cuatro ladrillos. (b) Demuestre que, si el proceso continuara así, podríamos obtener un salidizo tan grande como quisiéramos. (Martin Gardner, en el artículo mencionado anteriormente, afirma: "Con 52 naipes, el primero colocado de modo que su extremo esté al ras con un borde de la mesa, el salidizo máximo es un poco más de  $2\frac{1}{4}$  longitudes de naipes...") (c) Suponga ahora, en cambio, que aplicamos ladrillos uniformes de modo que el extremo de un ladrillo se salga del que está abajo por una fracción constante,  $1/n$ , de una longitud de ladrillo  $L$ . ¿Cuántos ladrillos,  $N$ , podemos usar en este proceso antes de que la pila se caiga? Compruebe la posibilidad de la respuesta para  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = \infty$ .

38. Una esfera homogénea de radio  $r$  y peso  $W$  se desliza a lo largo del suelo bajo la acción de una fuerza horizontal constante  $P$  aplicada a un cordón, como se muestra en la figura 40. (a) Demuestre que si  $\mu$  es el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y el suelo, la altura  $h$  está dada por  $h = r(1 - \mu W/P)$ . (b) Demuestre que la esfera no está en equilibrio de traslación bajo estas circunstancias. ¿Existe algún punto con respecto al cual la esfera esté en

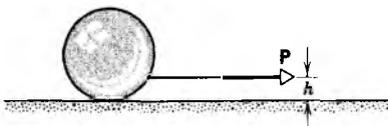


Figura 40 Problema 38.

equilibrio rotatorio? (c) ¿Podemos hacer que la esfera esté en equilibrio de rotación y de traslación, eligiendo una  $h$  diferente? ¿Y una dirección de  $P$  diferente? Explique.

**Sección 14-4 Equilibrio estable, inestable, y neutro de los cuerpos rígidos en un campo gravitatorio**

39. Un tazón que tiene un radio de curvatura  $r$  reposa sobre una mesa horizontal. Demuestre que el tazón estará en equilibrio estable respecto al punto central de su fondo solamente si el centro de masa del material apilado en el tazón no está tan alto como  $r$  sobre el centro del tazón.
40. Un cubo de densidad uniforme y arista  $a$  está equilibrado sobre una superficie cilíndrica de radio  $r$  como se muestra en la figura 41. Demuestre que el criterio para el equilibrio estable del cubo, suponiendo que la fricción sea suficiente para impedir el resbalamiento, es  $r > a/2$ .

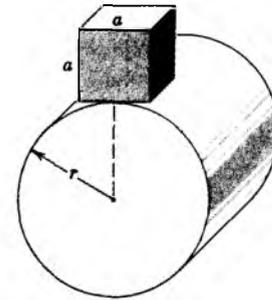


Figura 41 Problema 40.

**Sección 14-5 Elasticidad**

41. La figura 42 muestra la curva de esfuerzo-deformación de la cuarcita. Calcule el módulo de Young de este material.

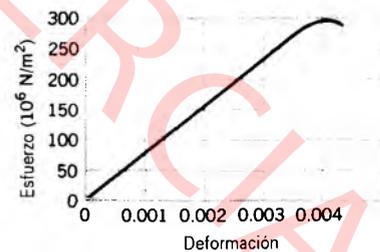


Figura 42 Problema 41.

42. Después de una caída, un alpinista de 95 kg de peso queda columpiándose al final de una cuerda de 15 m de longitud y 9.6 mm de diámetro. La cuerda se estira 2.8 cm. Calcule el módulo de Young de la cuerda.
43. El elevador de una mina está soportado por un solo cable de acero de 2.52 cm de diámetro. La masa total de la jaula del elevador más los ocupantes es de 873 kg. ¿En cuánto se estira el cable cuando el elevador está suspendido a 42.6 m debajo del motor del elevador? (Desprecie la masa del cable.)

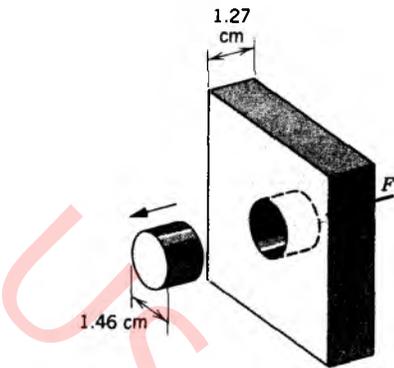


Figura 43 Problema 45.

44. Un poste horizontal de aluminio de 48.0 cm de diámetro sobresale 5.30 cm de un muro. Un objeto de 120 kg está suspendido del extremo del poste. El módulo de corte del aluminio es de  $3.00 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ . (a) Calcule el esfuerzo cortante en el poste. (b) Halle la deflexión vertical del extremo del poste.
45. Calcule la fuerza  $F$  necesaria para troquelar un agujero de 1.46 cm de diámetro en una placa de acero de 1.27 cm de espesor; véase la figura 43. El límite de resistencia al corte del acero es de  $345 \text{ MN/m}^2$ .
46. Una barra uniforme de 4.7 kg de masa y 1.3 m de longitud está suspendida de los extremos por dos alambres verticales. Un alambre es de acero y tiene un diámetro de 1.2 mm; el otro alambre es de aluminio y tiene un diámetro de 0.84 mm. Antes de unirlos a la barra, los alambres eran de la misma longitud, o sea, de 1.7 m. Halle el ángulo  $\theta$  entre la barra y la horizontal; véase la figura 44. (Desprecie el cambio en los diámetros de los alambres; la barra y los alambres están en el mismo plano.)

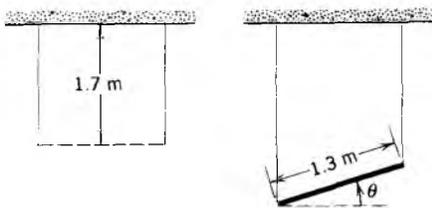


Figura 44 Problema 46.

47. La pala de un rotor de 5.27 m de longitud está compuesta de un material de  $4.55 \text{ g/cm}^3$  de densidad y un límite de resistencia a la tensión de  $446 \text{ MN/m}$ . Calcule la velocidad de rotación más grande posible. Suponga que la pala gira en torno a un eje perpendicular a la pala y que pasa por el extremo.
48. Se va a construir un túnel de 152 m de longitud, 7.18 m de altura y 5.77 m de anchura (de techo plano) a 61.5 m bajo tierra. El techo del túnel va a estar soportado enteramente por columnas de acero cuadradas, cada una con un área de sección transversal de  $962 \text{ cm}^2$ . La densidad del material del suelo es de  $2.83 \text{ g/cm}^3$ . (a) Calcule el peso

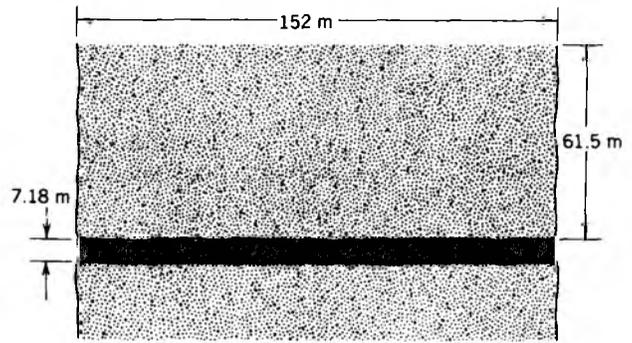


Figura 45 Problema 48.

- que deben soportar las columnas. (b) ¿Cuántas columnas se necesitan para proporcionar un factor de seguridad de 2 contra la rotura? Véase la figura 45.
49. Una losa rectangular de roca descansa sobre un plano inclinado a  $26.0^\circ$ ; véase la figura 46. La losa tiene las dimensiones de 43.3 m de longitud, 2.50 m de espesor, y 12.2 m de anchura. Su densidad es de  $3.17 \text{ g/cm}^3$ . El coeficiente de fricción estática entre la losa y la roca sobre la que está es de 0.390. (a) Calcule la componente del peso de la losa que actúa paralela al plano inclinado. (b) Calcule la fuerza estática de la fricción. (c) Comparando (a) y (b), convéncese usted mismo de que la losa está a punto de deslizarse. Solamente evita esto la cohesión entre la losa y el plano inclinado. Se desea estabilizar la losa con anclas dirigidas perpendicularmente al plano inclinado de modo que, despreciando la cohesión, la losa sea estable. Cada ancla tiene un área de  $6.38 \text{ cm}^2$  y una resistencia al corte de  $362 \text{ MN/m}^2$ . Halle el número mínimo de anclas necesario. (Las tuercas de las anclas no están apretadas y por lo tanto no afectan la fuerza normal.)
50. Considérese una barra de metal de longitud  $L$ , área de la sección transversal  $A$ , separación atómica de equilibrio  $x$ , y módulo de Young  $E$ . Cuando se aplica una fuerza de tensión  $F$  a la barra, provoca un estiramiento de  $\Delta L$ . Calcule la constante  $k$  de la fuerza atómica derivando expresiones de (a) el número de cadenas de átomos en cualquier sección transversal, (b) el número de átomos en una sola cadena de longitud  $L$ , (c) el alargamiento microscópico  $\Delta x$  entre los átomos, y (d) la fuerza de tracción  $f$  entre los átomos. (e) Escriba  $f = k \Delta x$  y demuestre que  $k = Ex$ . (f) Calcule el valor de  $k$  para un metal típico para el cual  $E = 1.2 \text{ GN/m}^2$  y  $x = 16 \text{ nm}$ .

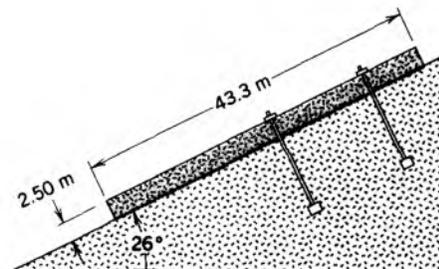


Figura 46 Problema 49.