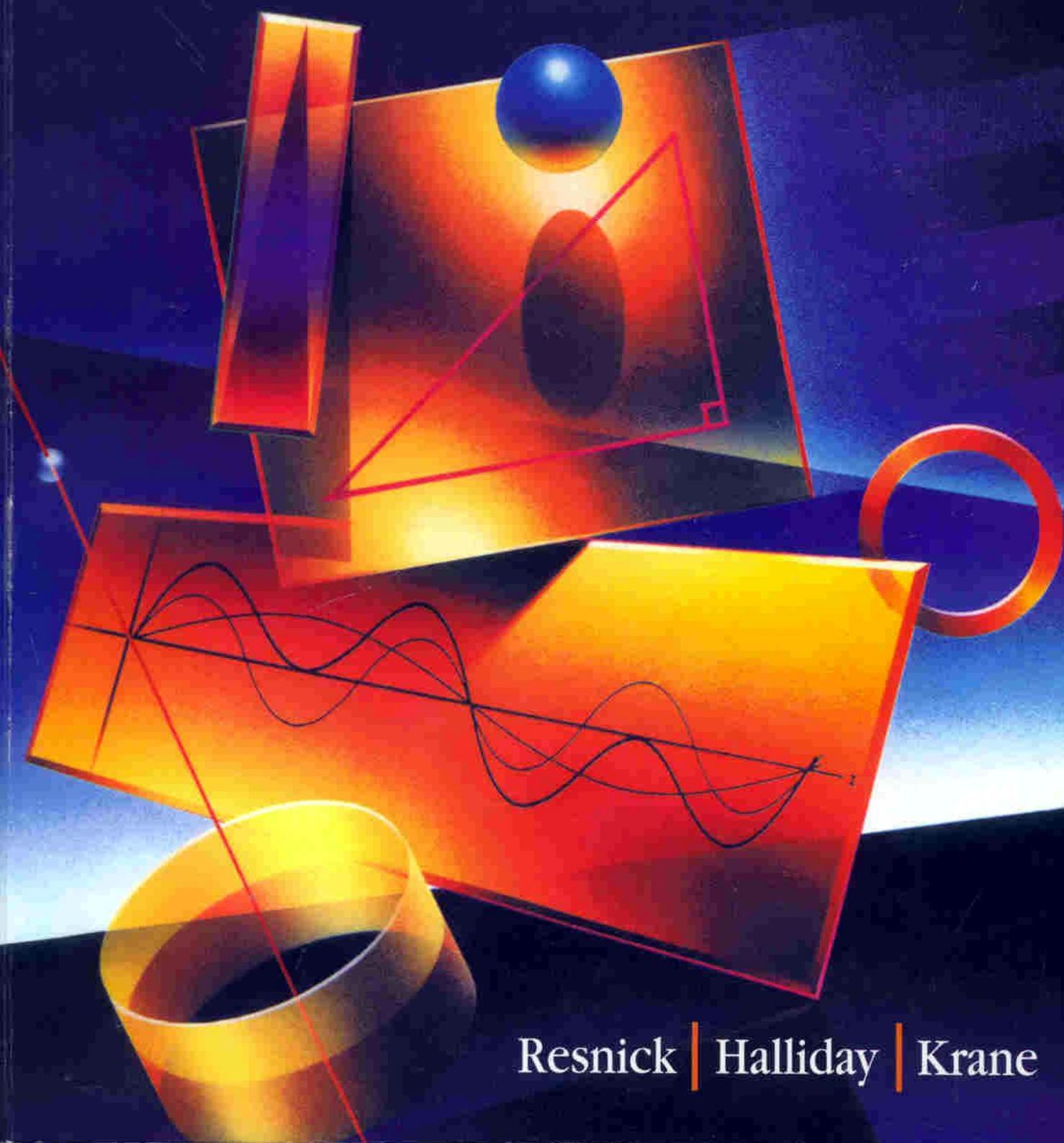


FÍSICA 1

4^a Edición



Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

<hr/> <hr/>		3-4 Suma de Vectores: Método de las Componentes	46
<hr/> <hr/>		3-5 Multiplicación de Vectores	48
<hr/> <hr/>		3-6 Las Leyes Vectoriales en la Física (<i>Opcional</i>)	50
<hr/> <hr/>		Preguntas y Problemas	53
CAPÍTULO 1	1	<hr/> <hr/>	
MEDICIONES		CAPÍTULO 4	
1-1 Las Cantidades Físicas, Patrones y Unidades	1	MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL	
1-2 El Sistema Internacional de Unidades	2	Y TRIDIMENSIONAL	59
1-3 Patrón de Tiempo	3	<hr/> <hr/>	
1-4 Patrón de Longitud	5	4-1 Posición, Velocidad, y Aceleración	59
1-5 Patrón de Masa	7	4-2 Movimiento con Aceleración Constante	61
1-6 Precisión y Cifras Significativas	8	4-3 Movimiento de proyectiles	63
1-7 Análisis Dimensional	10	4-4 Movimiento Circular Uniforme	67
Preguntas y Problemas	11	4-5 Vectores de Velocidad y de Aceleración en el Movimiento Circular (<i>Opcional</i>)	69
<hr/> <hr/>		4-6 Movimiento Relativo	71
CAPÍTULO 2	17	Preguntas y Problemas	74
MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL		<hr/> <hr/>	
2-1 Cinemática de la Partícula	17	CAPÍTULO 5	
2-2 Descripciones del Movimiento	17	FUERZA Y LAS LEYES	
2-3 Velocidad Promedio	20	DE NEWTON	87
2-4 Velocidad Instantánea	21	<hr/> <hr/>	
2-5 Movimiento Acelerado	23	5-1 Mecánica Clásica	87
2-6 Movimiento con Aceleración Constante	25	5-2 Primera Ley de Newton	88
2-7 Cuerpos en Caída Libre	28	5-3 Fuerza	90
2-8 Galileo y la Caída-Libre (<i>Opcional</i>)	29	5-4 Masa	90
2-9 Medición de la Aceleración en Caída Libre (<i>Opcional</i>)	30	5-5 Segunda Ley de Newton	92
Preguntas y Problemas	31	5-6 Tercera Ley de Newton	94
<hr/> <hr/>		5-7 Unidades de Fuerza	96
CAPÍTULO 3	41	5-8 Peso y Masa	97
VECTORES		5-9 Medición de Fuerzas	99
3-1 Vectores y Escalares	41	5-10 Aplicaciones de las Leyes de Newton	100
3-2 Suma de Vectores: Método Gráfico	42	5-11 Más Aplicaciones de las Leyes de Newton	103
3-3 Componentes de Vectores	43	Preguntas y Problemas	106

CAPÍTULO 6
DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117

6-1 Leyes de la Fuerza	117
6-2 Fuerzas de Fricción	118
6-3 La Dinámica del Movimiento Circular Uniforme	123
6-4 Ecuaciones del Movimiento: Fuerzas Constantes y No Constantes	126
6-5 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Analíticos	128
6-6 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Numéricos (<i>Opcional</i>)	129
6-7 Fuerzas de Arrastre y el Movimiento de proyectiles	130
6-8 Marcos No Inerciales y Seudofuerzas (<i>Opcional</i>)	133
6-9 Limitaciones de las Leyes de Newton (<i>Opcional</i>)	135
Preguntas y Problemas	137

CAPÍTULO 7
TRABAJO Y ENERGÍA 149

7-1 Trabajo Efectuado por una Fuerza Constante	149
7-2 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Unidimensional	153
7-3 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Bidimensional (<i>Opcional</i>)	155
7-4 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía	157
7-5 Potencia	159
7-6 Marcos de Referencia (<i>Opcional</i>)	160
7-7 Energía Cinética a Altas Velocidades (<i>Opcional</i>)	162
Preguntas y Problemas	163

CAPÍTULO 8
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171

8-1 Fuerzas Conservativas	171
8-2 Energía Potencial	174
8-3 Sistemas Conservativos Unidimensionales	176
8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionales: La Solución Completa	179
8-5 Sistemas Conservativos Bidimensionales y Tridimensionales (<i>Opcional</i>)	182
8-6 Conservación de la Energía en un Sistema de Partículas	183

8-7 Masa y Energía (<i>Opcional</i>)	187
8-8 Cuantización de la Energía (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	189 190

CAPÍTULO 9
SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203

9-1 Sistemas de Dos Partículas	203
9-2 Sistemas de Muchas Partículas	206
9-3 Centro de Masa de Objetos Sólidos	209
9-4 Ímpetu Lineal de una Partícula	212
9-5 Ímpetu Lineal de un Sistema de Partículas	213
9-6 Conservación del Ímpetu Lineal	214
9-7 Trabajo y Energía en un Sistema de Partículas (<i>Opcional</i>)	217
9-8 Sistemas de Masa Variable (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	220 224

CAPÍTULO 10
COLISIONES 233

10-1 ¿Qué es una Colisión?	233
10-2 Impulso e Ímpetu	234
10-3 Conservación e Ímpetu Durante las Colisiones	236
10-4 Colisiones en una Dimensión	237
10-5 Colisiones Bidimensionales	241
10-6 Marco de Referencia del Centro de Masa	244
10-7 Procesos de Desintegración Espontánea (<i>Opcional</i>)	248
Preguntas y Problemas	250

CAPÍTULO 11
CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261

11-1 Movimiento de Rotación	261
11-2 Las Variables de la Rotación	262
11-3 Rotación con Aceleración Angular Constante	264
11-4 Cantidades de Rotación como Vectores	265
11-5 Relaciones Entre Variables Lineales y Angulares: Forma Escalar	268
11-6 Relaciones Entre las Variables Lineales y Angulares: Forma Vectorial (<i>Opcional</i>)	269
Preguntas y Problemas	271

CAPÍTULO 12
DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277

12-1 Dinámica de la Rotación: Una Visión General	277
--	-----

12-2 Energía Cinética de la Rotación e Inercia de la Rotación	278
12-3 Inercia de Rotación de los Cuerpos Sólidos	281
12-4 Torca que Actúa Sobre una Partícula	283
12-5 Dinámica de la Rotación de un Cuerpo Rígido	286
12-6 Movimientos de Rotación y de Traslación Combinados	290
Preguntas y Problemas	296

CAPÍTULO 13
ÍMPETU ANGULAR **305**

13-1 Ímpetu Angular de una Partícula	305
13-2 Sistemas de Partículas	307
13-3 Ímpetu Angular y Velocidad Angular	309
13-4 Conservación del Ímpetu Angular	313
13-5 El Trompo	319
13-6 Cuantización del Ímpetu Angular (<i>Opcional</i>)	320
13-7 Dinámica Rotacional: un Repaso	321
Preguntas y Problemas	321

CAPÍTULO 14
EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS **331**

14-1 Condiciones de Equilibrio	331
14-2 Centro de Gravedad	332
14-3 Ejemplos de Equilibrio	334
14-4 Equilibrio Estable, Inestable y Neutro de los Cuerpos Rígidos en un Campo Gravitatorio	339
14-5 Elasticidad	341
Preguntas y Problemas	344

CAPÍTULO 15
OSCILACIONES **353**

15-1 Sistemas Oscilatorios	353
15-2 El Oscilador Armónico Simple	355
15-3 Movimiento Armónico Simple	356
15-4 Consideraciones Energéticas en el Movimiento Armónico Simple	359
15-5 Aplicaciones del Movimiento Armónico Simple	361
15-6 Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme	365
15-7 Combinaciones de Movimientos Armónicos	367
15-8 Movimiento Armónico Amortiguado (<i>Opcional</i>)	368

15-9 Oscilaciones Forzadas y Resonancia (<i>Opcional</i>)	370
15-10 Oscilaciones de Dos Cuerpos (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	371 373

CAPÍTULO 16
GRAVITACIÓN **383**

16-1 La Gravitación Desde la Antigüedad Hasta Kepler	383
16-2 Newton y la Ley de la Gravitación Universal	385
16-3 La Constante Gravitatoria G	386
16-4 La Gravedad Cerca de la Superficie de la Tierra	388
16-5 Efecto Gravitatorio de una Distribución Esférica de la Materia (<i>Opcional</i>)	390
16-6 Energía Potencial Gravitatoria	393
16-7 El Campo Gravitatorio y el Potencial (<i>Opcional</i>)	396
16-8 Los Movimientos de Planetas y Satélites	397
16-9 Gravitación Universal	402
16-10 La Teoría General de la Relatividad (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	404 408

CAPÍTULO 17
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS **419**

17-1 Fluidos y Sólidos	419
17-2 Presión y Densidad	420
17-3 Variación de la Presión en un Fluido en Reposo	422
17-4 Principio de Pascal y Principio de Arquímedes	426
17-5 Medición de la Presión	429
17-6 Tensión Superficial (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	431 433

CAPÍTULO 18
DINÁMICA DE LOS FLUIDOS **441**

18-1 Conceptos Generales del Flujo de los Fluidos	441
18-2 Trayectoria de una Corriente y la Ecuación de Continuidad	442
18-3 La Ecuación de Bernoulli	445
18-4 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli y de la Ecuación de Continuidad	447
18-5 Campos de Flujo (<i>Opcional</i>)	450

18-6	Viscosidad, Turbulencia, y Flujo Caótico (<i>Opcional</i>)	453
	Preguntas y Problemas	456

CAPÍTULO 19
MOVIMIENTO ONDULATORIO **465**

19-1	Ondas Mecánicas	465
19-2	Tipos de Ondas	466
19-3	Ondas Viajeras	467
19-4	Velocidad de Onda	471
19-5	La Ecuación de la Onda (<i>Opcional</i>)	471
19-6	Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio	475
19-7	El Principio de Superposición	476
19-8	Interferencia de Ondas	478
19-9	Ondas Estacionarias	482
19-10	Resonancia	485
	Preguntas y Problemas	487

CAPÍTULO 20
ONDAS SONORAS **495**

20-1	La Velocidad del Sonido	495
20-2	Ondas Viajeras Longitudinales	497
20-3	Potencia e Intensidad de las Ondas Sonoras	499
20-4	Ondas Longitudinales Estacionarias	501
20-5	Sistemas Vibratorios y Fuentes de Sonido	503
20-6	Pulsaciones	506
20-7	El Efecto Doppler	508
	Preguntas y Problemas	511

CAPÍTULO 21
LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD **519**

21-1	Las Dificultades con la Física Clásica	519
21-2	Los Postulados de la Relatividad Especial	521
21-3	Consecuencias de los Postulados de Einstein	522
21-4	La Transformación de Lorentz	526
21-5	Medición de las Coordenadas Espacio-Tiempo de un Suceso	529
21-6	La Transformación de las Velocidades	529
21-7	Consecuencias de la Transformación de Lorentz	531
21-8	Ímpetu Relativista	535
21-9	Energía Relativista	537
21-10	La Lógica la Relatividad Especial	540
	Preguntas y Problemas	541

CAPÍTULO 22
TEMPERATURA **547**

22-1	Descripción Macroscópica y Descripción Microscópica	547
22-2	Temperatura y Equilibrio Térmico	548
22-3	Medición de la Temperatura	549
22-4	La Escala de Temperatura de un Gas Ideal	552
22-5	Dilatación Térmica	554
	Preguntas y Problemas	558

CAPÍTULO 23
LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL **565**

23-1	Propiedades Macroscópicas de un Gas y la Ley del Gas Ideal	565
23-2	El Gas Ideal: Un Modelo	568
23-3	Cálculo Cinético de la Presión	569
23-4	Interpretación Cinética de la Temperatura	571
23-5	Trabajo Efectuado Sobre un Gas Ideal	572
23-6	La Energía Interna de un Gas Ideal	576
23-7	Fuerzas Intermoleculares (<i>Opcional</i>)	578
23-8	La Ecuación de Estado de van der Waals (<i>Opcional</i>)	579
	Preguntas y Problemas	581

CAPÍTULO 24
MECÁNICA ESTADÍSTICA **587**

24-1	Distribuciones Estadísticas y Valores Medios	587
24-2	Recorrido libre medio	589
24-3	La Distribución de las Velocidades Moleculares	593
24-4	La Distribución de las Energías	597
24-5	Movimiento Browniano	599
24-6	Distribuciones Estadísticas Cuánticas (<i>Opcional</i>)	600
	Preguntas y Problemas	603

CAPÍTULO 25
EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA **607**

25-1	El Calor: Energía en Tránsito	607
25-2	Capacidad Calorífica y Calor Específico	609
25-3	Capacidades Caloríficas de los Sólidos	611
25-4	Capacidades Caloríficas de un Gas Ideal	612

25-5 La Primera Ley de la Termodinámica	616
25-6 Aplicaciones de la Primera Ley	619
25-7 La Transferencia de Calor	622
Preguntas y Problemas	626

CAPÍTULO 26
ENTROPIA Y LA SEGUNDA LEY
DE LA TERMODINÁMICA **635**

26-1 Procesos Reversibles y Procesos Irreversibles	635
26-2 Máquinas Térmicas y la Segunda Ley	637
26-3 Refrigeradores y la Segunda Ley	639
26-4 El Ciclo de Carnot	641
26-5 La Escala de Temperatura Termodinámica	644
26-6 Entropía: Procesos Reversibles	646
26-7 Entropía: Procesos Irreversibles	648
26-8 Entropía y la Segunda Ley	650
26-9 Entropía y Probabilidad	651
Preguntas y Problemas	653

APÉNDICES

A El Sistema Internacional de Unidades (SI)	A-1
B Algunas Constantes Fundamentales de la Física	A-3
C Algunos Datos Astronómicos	A-4
D Propiedades de los Elementos	A-5
E Tabla Periódica de los Elementos	A-7
F Partículas Elementales	A-8
G Factores de Conversión	A-10
H Fórmulas Matemáticas	A-14
I Programas de Computadora	A-16
J Premios Nobel de Física	A-20
K Tablas	A-24

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS IMPARES	A-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS	F-1
ÍNDICE	I-1

CAPÍTULO 8

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En el capítulo 7 hemos estudiado el teorema trabajo-energía, según el cual el trabajo total efectuado por las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. En este capítulo podremos ver que el trabajo efectuado sobre un sistema (que puede ser más complejo que las simples partículas consideradas anteriormente) por una cierta clase de fuerzas depende sólo de los estados inicial y final del sistema, y en ningún momento depende de la trayectoria seguida entre los estados. Tales fuerzas se denominan fuerzas conservativas y se distinguen también por su posibilidad de almacenar energía simplemente a partir de la configuración del sistema. La energía almacenada es llamada energía potencial. Otras fuerzas, llamadas fuerzas no conservativas, no pueden almacenar energía de esta manera.

El tema central de este capítulo es la conservación de la energía, uno de los principios rectores de la física. Mostramos aquí que en el almacenamiento, conversión o transferencia de energía en sistemas mecánicos, la energía total permanece constante. Comenzaremos con sistemas mecánicos sencillos sin fricción, en los que sólo desempeñan un papel las energías cinética y potencial. Más adelante, incluiremos sistemas en los que intervienen la fricción y otras fuerzas disipativas. Otras ampliaciones posteriores permiten que otras clases de energía, incluyendo la térmica y la electromagnética, se incorporen a este mismo marco, haciendo del principio de la conservación de la energía una de las leyes de la física más ampliamente aplicables y generales.

8-1 FUERZAS CONSERVATIVAS

Para ilustrar el comportamiento de los sistemas conservativos, consideraremos el movimiento unidimensional de una partícula sobre la que actúan tres fuerzas diferentes: la fuerza de un resorte, $F = -kx$; la fuerza de la gravedad, $f = mg$, y la fuerza de fricción, $F = \mu N$.

1. *La fuerza de un resorte.* La figura 1 muestra un bloque de masa m unido a un resorte de constante de fuerza k ; el bloque se desliza sin fricción por una superficie horizontal. Inicialmente (Fig. 1a) un agente externo ha comprimido al resorte de modo que el bloque se desplaza a $x = +d$ desde su posición en $x = 0$ cuando el resorte está relajado. El agente externo es súbitamente retirado en $t = 0$, y el resorte comienza a efectuar un trabajo sobre el

bloque. Cuando el bloque se mueve desde $x = +d$ hasta $x = 0$, el resorte efectúa un trabajo $+\frac{1}{2}kd^2$ conforme la ecuación 9 del capítulo 7. Según el teorema trabajo-energía, este trabajo aparece como energía cinética del bloque.

Cuando el bloque pasa por $x = 0$ (véase la Fig. 1b), el signo de la fuerza del resorte se invierte, y el resorte retarda ahora al bloque, efectuando un trabajo negativo sobre él. Cuando el bloque ha llegado momentáneamente al reposo, como en la figura 1c, la cantidad de este trabajo negativo efectuado por la fuerza del resorte entre $x = 0$ y $x = -d$ es de $-\frac{1}{2}kd^2$. De igual manera, desde $x = -d$ hasta $x = 0$, la fuerza del resorte efectúa un trabajo de $+\frac{1}{2}kd^2$, y desde $x = 0$ otra vez de regreso a $x = +d$, efectúa un trabajo de $-\frac{1}{2}kd^2$. El bloque está ahora otra vez en su posición original (compárense las figuras 1a y 1e), y vemos al sumar las cuatro contribuciones distintas que el trabajo total efectuado sobre el bloque por la fuerza del resorte en el ciclo completo es cero.

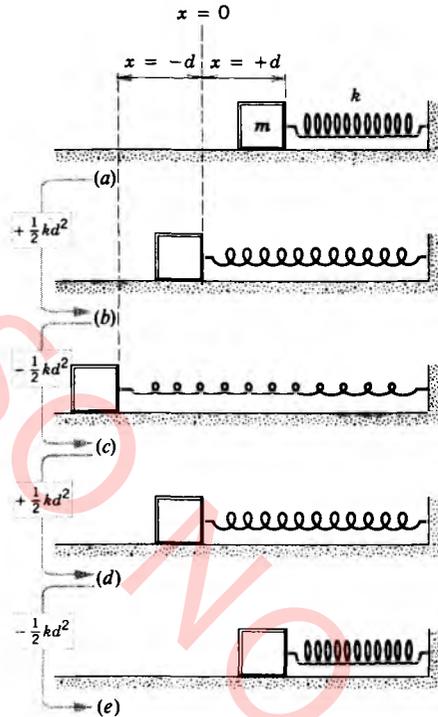


Figura 1 Un bloque se mueve bajo la acción de la fuerza de un resorte desde (a) $x = +d$ hasta (b) $x = 0$, hacia la izquierda, a (c) $x = -d$, a (d) $x = 0$, hacia la derecha, y (e) nuevamente a $x = +d$. En el extremo izquierdo se muestra el trabajo efectuado por la fuerza del resorte entre cada dos posiciones sucesivas. Nótese que el trabajo total efectuado por la fuerza del resorte sobre el bloque es de cero en el recorrido completo.

2. **La fuerza de la gravedad.** La figura 2 muestra un ejemplo de un sistema que consta de una pelota que recibe la acción de la gravedad de la Tierra. La pelota es lanzada hacia arriba por un agente externo que le da una velocidad inicial de v_0 y, por lo tanto, una energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$. Mientras la pelota se eleva, la Tierra efectúa un trabajo sobre ella hasta que la lleva momentáneamente al reposo en $y = h$. El trabajo efectuado por la Tierra al elevarse la pelota desde $y = 0$ hasta $y = h$ es $-mgh$ (la fuerza constante mg por la distancia h , negativa porque la fuerza y el desplazamiento están en direcciones opuestas cuando la pelota se eleva). El teorema trabajo-energía relaciona el cambio en la energía cinética, $-\frac{1}{2}mv_0^2$, con el trabajo neto efectuado por la única fuerza (la gravedad), $-mgh$. Al caer la pelota desde $y = h$ hasta $y = 0$, la fuerza de la gravedad efectúa el trabajo $+mgh$; por lo tanto, por analogía con el viaje hacia arriba, la energía cinética debe aumentar desde 0 hasta $+\frac{1}{2}mv_0^2$. El trabajo total efectuado por la fuerza de la gravedad en recorrido completo es de cero.

3. **La fuerza de la fricción.** En nuestro tercer ejemplo, consideremos un disco de masa m en el extremo de un

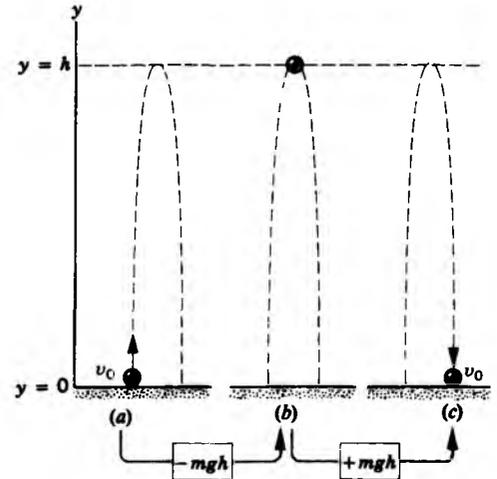


Figura 2 Una pelota es arrojada hacia arriba contra la gravedad de la Tierra. En (a) acaba de abandonar su punto de inicio, en (b) llega al punto culminante de su trayectoria, y en (c) ha regresado a su altura original. En la parte inferior de la figura se muestra el trabajo efectuado por la gravedad de la Tierra entre cada dos posiciones sucesivas. Nótese que el trabajo total efectuado por la fuerza de la gravedad sobre la pelota es de cero en el recorrido completo.

cordón de longitud R . Al disco se le da una velocidad inicial v_0 , y el cordón lo obliga a moverse en un círculo de radio R sobre una superficie horizontal que ejerce una fuerza de fricción sobre el disco (véase la Fig. 3). La única fuerza que efectúa un trabajo sobre el disco es la fuerza de fricción ejercida por la superficie sobre la base del disco. Esta fuerza actúa *siempre* en dirección opuesta a la velocidad del disco, de modo que el trabajo efectuado por la fuerza de fricción sobre el disco es *siempre* negativo. Cuando el disco ha regresado a su punto de partida, el trabajo efectuado por la fuerza de fricción en este recorrido completo definitivamente no es cero; el trabajo total efectuado en el recorrido completo es una cantidad negativa. El disco regresa a su punto de partida con una energía cinética menor después del viaje completo.

Obsérvense las diferencias entre estos tres ejemplos. En los dos primeros (la fuerza de un resorte y la fuerza de la gravedad), el objeto regresó a su punto de partida después de un viaje redondo sin que se haya efectuado ningún trabajo neto sobre él (y, por lo tanto, sin cambio alguno en la energía cinética). En el tercer ejemplo hubo un trabajo neto efectuado sobre el objeto por la fuerza de fricción en el recorrido completo, y hubo una pérdida de energía cinética. Esta diferencia básica en el comportamiento entre las dos clases de fuerzas nos lleva a nuestra primera forma de distinguir las fuerzas conservativas.

Si un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza que no efectúe un trabajo total durante un recorrido com-

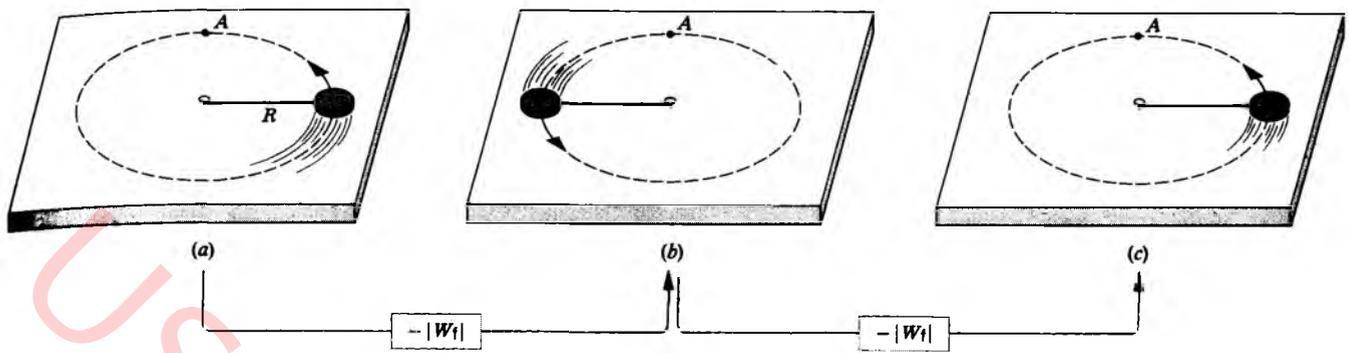


Figura 3 Un disco se mueve con fricción en un círculo sobre una superficie horizontal. Las posiciones mostradas representan (a) un punto inicial arbitrario, (b) media revolución más tarde, y (c) otra media revolución más tarde. En la parte inferior de la figura se indica el trabajo efectuado por la fricción entre las posiciones sucesivas. Nótese que el trabajo total efectuado por la fuerza de fricción sobre el disco *no es* cero en el recorrido completo, sino que tiene un valor negativo $-2|W_f|$.

pleto, entonces la fuerza es conservativa; de lo contrario, es no conservativa.

La fuerza elástica de restitución (fuerza del resorte) y la gravedad son dos ejemplos de fuerzas conservativas, y la fricción es un ejemplo de fuerza no conservativa.*

Una segunda manera de distinguir las fuerzas conservativas de las fuerzas no conservativas se refiere al trabajo efectuado al llevar al cuerpo a través de trayectorias diferentes que lleven a la misma posición final. Como ejemplo, calculemos el trabajo efectuado por la fuerza del resorte cuando el bloque de la figura 1 se mueve desde $x = +d$ hasta $x = -d/2$ a lo largo de dos trayectorias diferentes (véase la Fig. 4); la trayectoria 1, directamente; la trayectoria 2, moviéndose primero desde $x = +d$ hasta $x = -d$, y después desde $x = -d$ hasta $x = -d/2$. Haciendo que W_1 y W_2 representen al trabajo efectuado por el resorte a lo largo de las trayectorias 1 y 2, tenemos que

$$W_1 = \int_{+d}^{-d/2} (-kx) dx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{+d}^{-d/2}$$

* Cuando un objeto se mueve sometido a la fuerza de fricción se forman y rompen, repetidamente, soldaduras microscópicas, como se describió en la sección 6-2. Cuando el objeto vuelve a recorrer su trayectoria, los cambios en la superficie no se restablecen y, por lo tanto, la fuerza de fricción, vista macroscópicamente, es ciertamente no conservativa. Sin embargo, las fuerzas interatómicas superficiales responsables de la fricción son fuerzas electrostáticas, las cuales *son* fuerzas conservativas (véase el capítulo 30). Si al recorrer de nuevo la trayectoria restablecemos todos los átomos alterados en sus ubicaciones originales, hallaríamos que la fuerza de fricción sería microscópicamente conservativa. Este proceso es altamente improbable (de hecho, se desplazarían más átomos a causa de nuevas soldaduras cuando la trayectoria se recorre de nuevo), y así la fuerza de fricción es macroscópicamente no conservativa.

$$= -\frac{1}{2}k[(-d/2)^2 - d^2] = \frac{3}{8}kd^2$$

y

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{+d}^{-d} (-kx) dx + \int_{-d}^{-d/2} (-kx) dx \\ &= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{+d}^{-d} - \frac{1}{2}kx^2 \Big|_{-d}^{-d/2} \\ &= 0 - \frac{1}{2}k[(-d/2)^2 - (-d)^2] = \frac{3}{8}kd^2. \end{aligned}$$

Entonces $W_1 = W_2$, y el trabajo efectuado es el mismo en las dos trayectorias diferentes.

Por otra parte, consideremos el comportamiento de la fuerza de fricción no conservativa en el sistema ilustrado en la figura 3 cuando el disco se mueve a través de dos trayectorias diferentes a la posición mostrada en la figura 3 como punto A. Si comparamos el trabajo efectuado por la fricción cuando el disco se mueve desde el punto de partida hasta el punto A a través de un cuarto de revolución con el trabajo efectuado por la fricción cuando se mueve $1\frac{1}{4}$ revoluciones (llegando exactamente a la misma ubicación final), hallamos que el trabajo (negativo) efectuado por la fricción será de magnitud cinco veces mayor en la segunda trayectoria. Entonces, en el caso de la fuerza de fricción, el trabajo depende de la trayectoria seguida entre las ubicaciones inicial y final.

Esto nos lleva a nuestra segunda manera de distinguir las fuerzas conservativas.

Si el trabajo efectuado por una fuerza para mover un cuerpo desde una posición inicial hasta una posición final es independiente de la trayectoria seguida entre los dos puntos, entonces la fuerza es conservativa; de lo contrario es no conservativa.

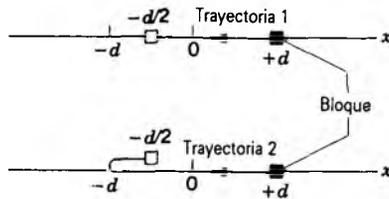


Figura 4 El bloque (representado aquí por un cuadrado) del sistema de la figura 1 se mueve desde $x = +d$ hasta $x = -d/2$ a lo largo de dos trayectorias diferentes.

Con ayuda de la figura 5 podemos demostrar que los dos criterios que hemos desarrollado para identificar las fuerzas conservativas son, justamente, equivalentes. En la figura 5a, una partícula se mueve en viaje completo desde a hasta b y regresa de nuevo. Si sólo actúa sobre la partícula una fuerza conservativa F , el trabajo total efectuado sobre la partícula por esa fuerza durante el ciclo debe ser cero. Esto es,

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

o sea

$$\int_{\text{trayectoria 1}}^b_a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{trayectoria 2}}^a_b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1)$$

donde $W_{ab,1}$ significa "el trabajo efectuado por la fuerza cuando la partícula se mueve desde a hasta b a lo largo de la trayectoria 1" y $W_{ba,2}$ significa "el trabajo efectuado por la fuerza cuando la partícula se mueve desde b hasta a a lo largo de la trayectoria 2". La ecuación 1 es el enunciado matemático equivalente al primer criterio para una fuerza conservativa.

Al invertir la dirección en que viajamos por cualquier trayectoria particular se intercambian los límites de la integración y cambia el signo del desplazamiento; esto es, el trabajo para ir desde a hasta b está relacionado con el trabajo para ir desde b hasta a :

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{cualquier trayectoria particular})$$

o, en el caso de la trayectoria 2,

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \quad (2)$$

Combinando las ecuaciones 1 y 2 nos da

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

o sea

$$\int_{\text{trayectoria 1}}^b_a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{trayectoria 2}}^b_a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3)$$

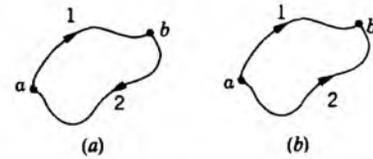


Figura 5 (a) Una partícula, actuada por una fuerza conservativa, se mueve en viaje redondo comenzando en el punto a , pasando a través del punto b , y regresando al punto a . (b) Una partícula arranca desde el punto a y viaja al punto b siguiendo cualquiera de dos trayectorias posibles.

Éste es el enunciado matemático de la segunda definición de una fuerza conservativa: el trabajo efectuado por la fuerza es el mismo para cualquier trayectoria entre a y b . Así, la primera definición nos conduce directamente a la segunda y (en virtud de un argumento similar) la segunda nos conduce a la primera, de modo que las dos definiciones son equivalentes.

8-2 ENERGÍA POTENCIAL

Obtendremos una introspección nueva en el análisis de sistemas con fuerzas conservativas si introducimos un nuevo concepto, la *energía potencial*. Como veremos, la energía potencial puede ser definida sólo para fuerzas conservativas como la fuerza de un resorte o la fuerza de la gravedad; no existe, pues, para fuerzas no conservativas, tales como la fricción.

La energía potencial, representada por el símbolo U , es la *energía de configuración* de un sistema. Es la energía almacenada en un sistema a causa de la posición relativa u orientación de las partes de un sistema (por ejemplo, la compresión en el sistema bloque-resorte o la separación del sistema pelota-Tierra).

Consideremos un sistema en el que únicamente actúe una fuerza, y hagamos que la fuerza sea conservativa. Cuando cambiamos la configuración del sistema, tal como el movimiento de una de sus partes, la fuerza conservativa efectúa un trabajo W . Definimos que el *cambio* en la energía potencial ΔU correspondiente a un cambio particular en la configuración es

$$\Delta U = -W. \quad (4)$$

El cambio en la energía potencial durante el proceso es el negativo del trabajo efectuado por la fuerza conservativa.

Cuando el sistema bloque-resorte en la figura 1 cambia su configuración de la $1d$ (donde el resorte está en un estado de relajamiento) a la $1e$ (donde el bloque está momentáneamente en reposo), el trabajo efectuado por la fuerza del resorte sobre el bloque es $W = -\frac{1}{2}kd^2$. El cambio en la energía potencial del sistema es, por lo tanto,

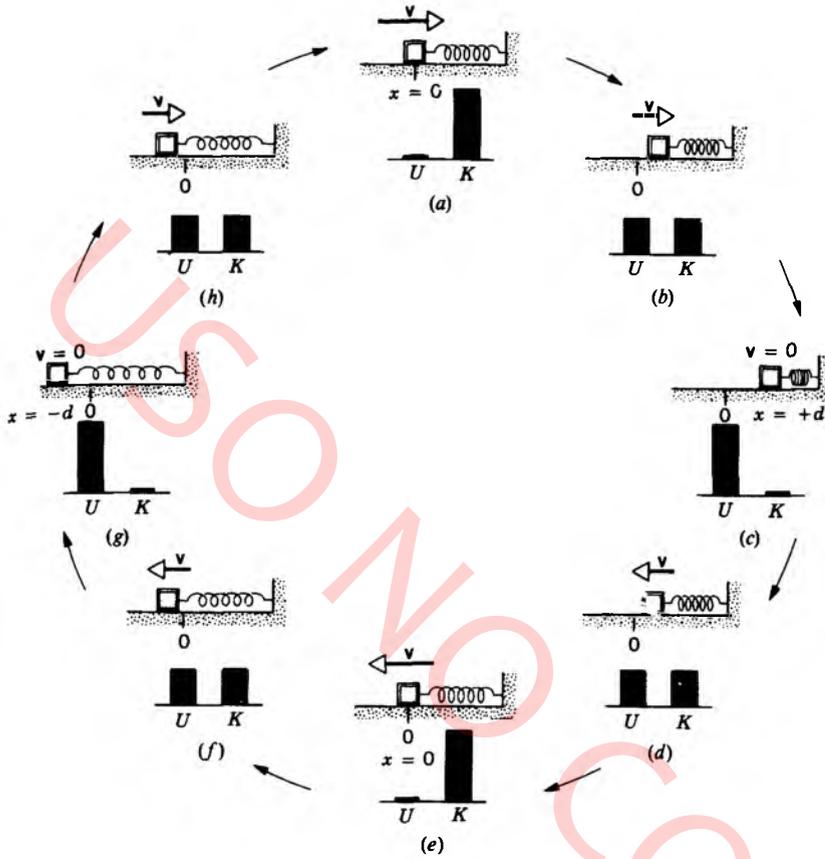


Figura 6 Un bloque unido a un resorte oscila sobre una superficie horizontal sin fricción. La energía mecánica E del sistema permanece constante, pero es distribuida entre energía cinética y energía potencial al moverse el sistema. En ciertos momentos (a, e) la energía es totalmente cinética, en otros (c, g) es potencial, y en otros más (b, d, f, h) es compartida igualmente entre las dos formas.

$\Delta U = -W = +\frac{1}{2}kd^2$. Sin embargo, de acuerdo con el teorema trabajo-energía, el cambio en la energía cinética del bloque es $\Delta K = W = -\frac{1}{2}kd^2$. Para el sistema bloque-resorte tenemos, por lo tanto, el resultado siguiente:

$$\Delta U + \Delta K = 0. \quad (5)$$

La ecuación 5 que hemos obtenido para el sistema bloque-resorte, es, de hecho, un resultado general que se deduce directamente de la ecuación 4 y del teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$. Establece que, en un sistema en el que sólo actúen fuerzas conservativas, cualquier cambio de la energía potencial debe estar equilibrado por un cambio igual y opuesto de la energía cinética.

Como ejemplo, soltemos el bloque (véase de nuevo la figura 1a) desde $x = +d$ cuando el resorte está comprimido. El resorte empuja contra el bloque y lo acelera. El desplazamiento desde el equilibrio disminuye, el resorte efectúa un trabajo positivo sobre el bloque, y el cambio en la energía potencial es, por lo tanto, negativo según la ecuación 4. Al mismo tiempo que la energía potencial disminuye, la energía cinética aumenta.

Podemos también escribir la ecuación 5 así:

$$\Delta(U + K) = 0. \quad (6)$$

En estos procesos el cambio en la $U + K$ total es de cero. Si no existe un cambio en la suma $U + K$, entonces el valor de la suma debe ser una constante durante el movimiento. Llamamos E a esta constante, la *energía mecánica* del sistema conservativo:

$$U + K = E. \quad (7)$$

La ecuación 7 es la representación matemática de la ley de la *conservación de la energía mecánica*. En cualquier sistema aislado de objetos que interactúan sólo por fuerzas conservativas, tales como el bloque y el resorte, la energía puede ser transferida una y otra vez de cinética a potencial, pero el cambio total es de cero; la suma de las energías cinética y potencial permanece constante. La figura 6 muestra una representación de la distribución de la energía cinética y de la energía potencial en el sistema que consta de bloque y resorte cuando el sistema oscila libremente.

Supongamos que actúe más de una fuerza conservativa sobre un objeto, por ejemplo, el bloque de la figura 7, sobre el cual actúan dos fuerzas, F_{resorte} y F_{grav} , cada una de las cuales efectúa un trabajo sobre el bloque. El teorema trabajo-energía, que hemos utilizado, para derivar la ecuación 5, se refiere siempre al trabajo neto efectuado por

todas las fuerzas que actúan sobre el objeto, que en este caso es $W_{\text{resorte}} + W_{\text{grav}}$. Usando la ecuación 4 ($\Delta U = -W$), podemos asociar un cambio de la energía potencial con el trabajo efectuado por cada fuerza, de modo que la ecuación 5 se convierte en

$$\Delta U_{\text{resorte}} + \Delta U_{\text{grav}} + \Delta K = 0$$

y la ecuación 7 resulta ser

$$U_{\text{resorte}} + U_{\text{grav}} + K = E. \quad (8)$$

Debe considerarse que la energía potencial es una propiedad de todo el sistema y de ninguna manera es una parte en especial de un sistema. Por ejemplo, no es la pelota de la figura 2 la que tiene una energía potencial; es el sistema que consiste de Tierra + pelota. Cuando la pelota se eleva una altura vertical h , la energía potencial del sistema aumenta en mgh , y la energía cinética del sistema disminuye en la misma cantidad. Cuando la pelota cae libremente a la tierra a través de la misma altura h , la energía potencial del sistema disminuye en mgh , y la energía cinética del sistema aumenta en la misma cantidad.

Puesto que la pelota tiene mucha menos masa que la Tierra, virtualmente todo el aumento de la energía cinética del sistema Tierra + pelota se le da a la pelota. Es por esta razón que a veces nos referimos a la energía potencial de la pelota en lugar de (más precisamente) el sistema Tierra + pelota. En otros sistemas, en los cuales las masas sean más iguales entre sí, ambos objetos podrían adquirir una energía cinética medible como resultado del cambio en la energía potencial. El método para calcular cómo se distribuye la energía cinética entre los dos objetos se trata en el capítulo 9.

8-3 SISTEMAS CONSERVATIVOS UNIDIMENSIONALES

Podemos usar la ecuación 4 para obtener el cambio en la energía potencial de una partícula en movimiento unidimensional en un sistema en el cual reciba la acción de una sola fuerza conservativa $F(x)$:

$$\Delta U = -W = - \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (9)$$

La partícula se mueve desde la coordenada inicial x_0 hasta la coordenada final x . Puesto que la energía potencial depende sólo de la posición, el cambio de ΔU entre x_0 y x es $\Delta U = U(x) - U(x_0)$, y obtenemos

$$U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(x) dx. \quad (10)$$

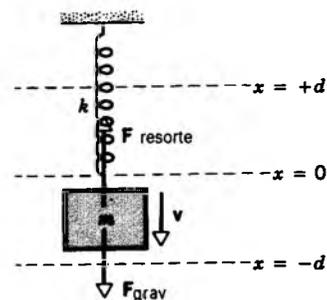


Figura 7 Un bloque de masa m , suspendido de un resorte, oscila verticalmente entre $x = +d$ y $x = -d$. El movimiento del bloque está regido por dos fuerzas conservativas, la fuerza del resorte F_{resorte} y la fuerza de gravedad de la Tierra F_{grav} .

Si consideramos que el punto x_0 es un punto de referencia arbitrario, podemos entonces obtener la función $U(x)$ de la energía potencial. Somos libres de elegir cualquier valor conveniente para la energía potencial en el punto de referencia, $U(x_0)$, porque sólo los cambios de la energía potencial son significativos. Para una elección particular de $U(x_0)$, la función resultante $U(x)$ podría entonces ser usada para calcular la energía potencial en puntos particulares del movimiento, por ejemplo x_1 y x_2 . Una elección diferente de $U(x_0)$ cambiará los valores de $U(x_1)$ y de $U(x_2)$ según la misma constante, pero la diferencia en la energía potencial, $U(x_2) - U(x_1)$, no cambia. El análisis del comportamiento dinámico es, pues, independiente de la elección de $U(x_0)$.

En efecto, la elección del punto de referencia para $U(x)$ es similar a la elección de un marco de referencia para la energía cinética. Como lo estudiamos en la sección 7-6, observadores en movimiento relativo pueden diferir en los valores particulares de la energía cinética que midan. Observadores en diferentes marcos de referencia diferirán en sus valores de U , K , y la energía mecánica E , pero todos estarán de acuerdo en la constancia de E y en la conservación de la energía mecánica.

Al moverse desde x_0 hasta x , la velocidad de la partícula cambiará desde v_0 hasta v y, de acuerdo con el teorema trabajo-energía, el trabajo efectuado por la fuerza F es

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (11)$$

Combinando las ecuaciones 9, 10, y 11, tenemos que

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = E. \quad (12)$$

La cantidad de la derecha en la ecuación 12 depende solamente de la posición inicial x_0 y de la velocidad inicial v_0 , las cuales tienen valores definidos; por lo tanto, es constante durante el movimiento. Ésta es la *energía mecánica* constante E . Nótese que la fuerza y la aceleración

no aparecen en esta ecuación, sino que sólo aparecen la posición y la velocidad. La ecuación 12 es otra forma de la ley de la conservación de la energía mecánica para fuerzas conservativas.

En lugar de comenzar con las leyes de Newton, podemos simplificar la solución de problemas que impliquen sólo fuerzas conservativas comenzando con la ecuación 12. Esta relación se deriva de las leyes de Newton, por supuesto, pero está a un paso más cercano a la solución (la llamada primera integral del movimiento). A menudo resolvemos problemas sin analizar las fuerzas o sin escribir las leyes de Newton, buscando en su lugar algo que sea constante en el movimiento; aquí la energía mecánica es constante y podemos escribir la ecuación 12 como un primer paso.

En una dimensión podemos escribir la relación entre la fuerza y la energía potencial (Ec. 9) así:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (13)$$

Para demostrar esto, sustituyamos esta expresión para $F(x)$ en la ecuación 9 y observemos que obtenemos una identidad. La ecuación 13 nos da otra manera de ver la energía potencial. *La energía potencial es una función de la posición, cuya derivada negativa nos da la fuerza.* La fuerza F es ejercida por el sistema cuya energía potencial sea U .

Ilustramos ahora el cálculo de la energía potencial con los dos ejemplos de fuerzas conservativas que consideramos en la sección 8-1, el sistema bloque-resorte y el sistema pelota-Tierra.

La fuerza del resorte

Elegimos que la posición de referencia x_0 del bloque en el sistema bloque-resorte de la figura 1 fuese aquel en que la posición del resorte está en su estado de relajamiento ($x_0 = 0$), y declaramos que la energía potencial del sistema es cero cuando el bloque está en esta posición [$U(x_0) = 0$]. La energía potencial del sistema bloque-resorte puede hallarse sustituyendo estos valores en la ecuación 10 y evaluando la integral para la fuerza del resorte, $F(x) = -kx$:

$$U(x) - 0 = -\int_0^x (-kx) dx$$

o sea

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (14)$$

Siempre que el bloque sea desplazado una distancia x de su posición de referencia, la energía potencial del sistema es $\frac{1}{2}kx^2$. Se obtiene el mismo resultado cuando x es positiva que cuando es negativa; esto es, ya sea que el resorte esté estirado o comprimido en una cantidad x dada, la energía almacenada es la misma.

Al diferenciar la ecuación 14, vemos que la ecuación 13 se satisface:

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}kx^2 \right) = -kx = F.$$

Supongamos que estiramos el sistema bloque-resorte hasta que el bloque esté a una distancia x_m de su posición de referencia; la energía potencial es $\frac{1}{2}kx_m^2$. Si soltamos el resorte desde el reposo en esta configuración, la energía mecánica E es igual a $\frac{1}{2}kx_m^2$, puesto que no existe una energía cinética en el instante de soltarlo. En este caso, la ecuación 12 puede escribirse así:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \frac{1}{2}kx_m^2. \quad (15)$$

Esta expresión nos permite hallar la velocidad para cualquier valor particular del desplazamiento:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)}. \quad (16)$$

Como lo esperábamos, cuando $x = \pm x_m$, la ecuación 16 predice que la velocidad es cero. Cuando el bloque pasa a través del punto de referencia ($x = x_0 = 0$), la velocidad v_0 es

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} x_m. \quad (17)$$

La energía mecánica puede ser expresada en términos ya sea de la velocidad v_0 en la posición de referencia ($E = \frac{1}{2}mv_0^2$) o del desplazamiento máximo x_m en la posición de referencia ($E = \frac{1}{2}kx_m^2$).

La fuerza de la gravedad

Para el sistema pelota-Tierra, representamos a la coordenada vertical por y en lugar de x . Elegimos el punto de referencia $y_0 = 0$ en la superficie de la Tierra, y definimos que $U(y_0) = 0$ en ese punto. Podemos ahora evaluar la energía potencial $U(y)$ del sistema según la ecuación 10 con $F(y) = -mg$:

$$U(y) - 0 = -\int_0^y -mg dy$$

de donde

$$U(y) = mgy. \quad (18)$$

Nótese que la ecuación 13 se satisface para esta energía potencial: $-dU/dy = -mg = F$.

La velocidad inicial de la pelota en el punto de referencia es v_0 , y la ecuación 12 nos da

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (19)$$

Esta ecuación, que es equivalente a la ecuación 25 del capítulo 2, nos permite hallar la velocidad en cualquier altura y .

Este ejemplo ilustra el lenguaje ligeramente diferente del punto de vista de la energía y la fuerza en el análisis de la dinámica. El enfoque de la fuerza analiza este sistema como sigue: "La pelota comienza con velocidad inicial v_0 . La Tierra ejerce una fuerza $-mg$, y la aceleración resultante es $-g$. Esta aceleración hacia abajo hace que la velocidad disminuya hasta que la velocidad pase por cero a una altura h . La pelota comienza entonces a moverse hacia abajo sometida a la influencia de la gravedad de la Tierra y alcanza el terreno con velocidad $-v_0$ ".

El enfoque de la energía es como sigue: "La pelota comienza con energía cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$. Al elevarse, la energía potencial del sistema pelota-Tierra aumenta y, por lo tanto, la energía cinética debe disminuir para que se mantenga constante la energía mecánica E . En el punto más alto del movimiento, toda la energía cinética ha sido convertida en energía potencial gravitatoria. Al caer la pelota se invierte el proceso, convirtiéndose la energía potencial de nuevo en energía cinética y resultando completamente convertida una vez más cuando la pelota llegue al suelo al caer." Estos dos enfoques dan, por supuesto, el mismo resultado. A menudo hallamos que el enfoque de la energía es más útil y provee una mayor visión. Existen también casos en los que es más fácil trabajar con la energía (cantidad escalar), que con la fuerza (cantidad vectorial).

Problema muestra 1 Una cabina de elevador de masa m ($= 920$ kg) se mueve desde el nivel de la calle hasta la cima del edificio del World Trade Center en Nueva York, a una altura $h = 412$ m sobre el suelo. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial gravitatoria de la cabina?

Solución Estrictamente, estamos hablando del cambio de la energía potencial del sistema cabina-Tierra. De la ecuación 18

$$\begin{aligned}\Delta U &= mg \Delta y = mgh = (920 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(412 \text{ m}) \\ &= 3.7 \times 10^6 \text{ J} = 3.7 \text{ MJ}.\end{aligned}$$

Ésta es casi exactamente $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$; la cantidad equivalente de energía eléctrica cuesta poco en cantidades comerciales.

Problema muestra 2 El resorte de un rifle de resorte se comprime una distancia d de 3.2 cm desde su estado de relajamiento, y en el cañón se introduce una bola de masa m ($= 12$ g). ¿A qué velocidad saldrá la bola del cañón al disparar el arma? La constante de fuerza k del resorte es de 7.5 N/cm. Suponga que no existe fricción y que el cañón del rifle está horizontal.

Solución Podemos aplicar la Ec. 12 directamente, con la posición inicial del resorte $x_0 = d$ y la velocidad inicial de la bola $v_0 = 0$. En el estado final el resorte está relajado ($x = 0$) y la bola se mueve a velocidad v . Entonces

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kd^2.$$

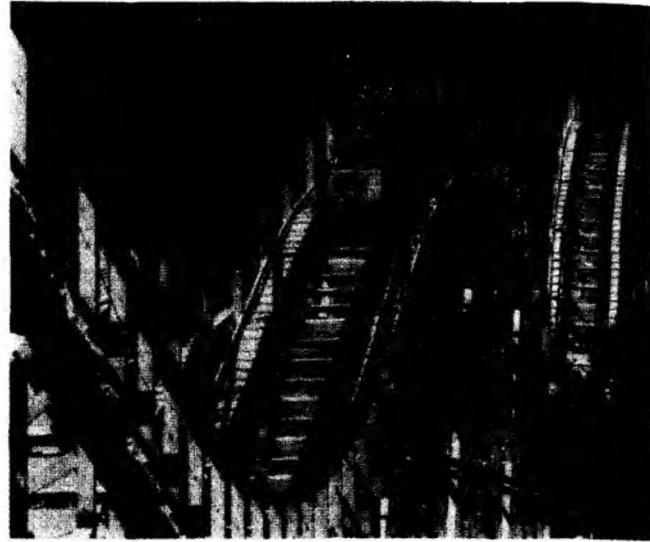


Figura 8 Un dispositivo para convertir la energía potencial de la gravedad en energía cinética.

Resolviendo para v nos da

$$v = d \sqrt{\frac{k}{m}} = (0.032 \text{ m}) \sqrt{\frac{750 \text{ N/m}}{12 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 8.0 \text{ m/s}.$$

Problema muestra 3 Una montaña rusa (Fig. 8) eleva lentamente un carrito lleno de pasajeros a una altura de $y = 25$ m, desde donde acelera cuesta abajo. Despreciando la fricción en el sistema, ¿a qué velocidad llegará el carrito al fondo?

Solución A primera vista, este problema parece sin remedio, ya que no se nos da información sobre el perfil de la trayectoria seguida por el carrito. Sin embargo, en ausencia de fricción, el carril no trabaja sobre el carrito, y la única fuerza que trabaja sobre él es la gravedad. La energía mecánica E_t , cuando el carrito está en la cima del carril, es

$$E_t = U_t + K_t = mgy + 0,$$

donde hemos tomado a $y = 0$ en el fondo del carril. Cuando el carrito llega al fondo, la energía mecánica E_b es

$$E_b = U_b + K_b = 0 + \frac{1}{2}mv^2,$$

con la referencia para U elegida de modo que $U = 0$ en $y = 0$. La conservación de la energía significa que $E_t = E_b$, y entonces

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2.$$

Resolviendo para v obtenemos

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(25 \text{ m})} = 22 \text{ m/s}.$$

Ésta es la misma velocidad con la que un objeto que cae verticalmente desde una altura de 25 m llega al suelo. El carril no cambia la velocidad del carrito "al caer"; simplemente cambia la dirección del carrito. Nótese que el resultado es independiente de la masa del carrito o de sus ocupantes.

Cuando se mueve a lo largo de la montaña rusa, su velocidad aumenta y disminuye al pasar por los valles y picos de la pista. Siempre y cuando no haya ningún otro pico que sea más alto que el punto de inicio, existirá suficiente energía mecánica en el sistema para superar la energía potencial de cualquiera de los picos intermedios y el sistema llegará hasta el final.

En este problema podemos apreciar rápidamente las ventajas de la técnica de la energía. El uso de las leyes de Newton requeriría conocer el perfil exacto de la pista, y luego se necesitaría hallar las componentes de la fuerza y de la aceleración en cada punto. Esto podría ser un procedimiento bastante difícil. Por otra parte, la solución mediante el uso de las leyes de Newton proporcionaría más información que la solución con el uso del método de la energía; por ejemplo, nos permitiría conocer el tiempo que le toma al carrito llegar hasta el fondo.

8-4 SISTEMAS CONSERVATIVOS UNIDIMENSIONALES: LA SOLUCIÓN COMPLETA

A menudo nuestra meta en el análisis de un sistema mecánico es describir el movimiento de una partícula en función del tiempo. En los capítulos 5 y 6 mostramos cómo resolver este problema aplicando las leyes de Newton; le llamamos a este procedimiento el método *dinámico*. Un procedimiento alternativo, y a veces más útil, es el método de la *energía*, el cual discutiremos en esta sección.

La ecuación 12 nos da la relación entre las coordenadas y la velocidad en el movimiento unidimensional cuando la fuerza depende solamente de la posición. (En una dimensión, las fuerzas que dependen sólo de la posición *siempre* son conservativas; esto no es necesariamente así en dos o en tres dimensiones, como lo estudiaremos en la sección 8-5.) Al llegar a la ecuación 12 eliminamos la fuerza y la aceleración. Para completar el análisis debemos eliminar la velocidad y determinar la posición en función del tiempo.

Podemos hacerlo de manera formal, como sigue. Según la ecuación 12 tenemos que

$$U(x) + \frac{1}{2}mv^2 = E.$$

Resolviendo para v , obtenemos

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}. \quad (20)$$

Aquí $U(x)$ es la energía potencial asociada con la fuerza que actúa en el sistema, mientras que E es la energía mecánica (constante) que es suministrada al sistema. Para un valor dado de E , la ecuación 20 nos dice que el movimiento está restringido a regiones del eje x en que $E \geq U(x)$. Esto es, no podemos tener una velocidad imaginaria o una energía cinética negativa, así que $[E - U(x)]$ debe ser cero o mayor de cero. Además, podemos obtener

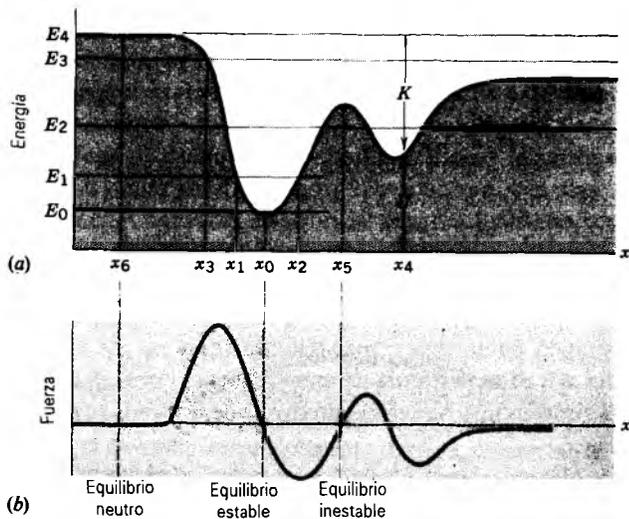


Figura 9 (a) Una función de energía potencial $U(x)$. (b) La fuerza correspondiente a esa energía potencial.

una buena descripción cualitativa de los tipos de movimiento posibles al trazar $U(x)$ vs. x . Esta descripción depende del hecho de que la velocidad es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia entre E y U .

Por ejemplo, consideremos la función de la energía potencial que se muestra en la figura 9a. (Aunque esta función se parezca al perfil de una montaña rusa, representa la energía potencial de un sistema conservativo en movimiento unidimensional. Una montaña rusa confinada a una pista se mueve en dos o tres dimensiones). Puesto que debe tenerse que $E \geq U(x)$ para un movimiento real, la energía mecánica más baja posible es E_0 . Para este valor de la energía $E = E_0 = U$, y la energía cinética debe ser cero. La partícula debe estar en reposo en el punto x_0 . Si al sistema se le diera una energía E_1 ligeramente más grande, la partícula podría moverse solamente entre x_1 y x_2 . Al moverse desde x_0 su velocidad disminuye al acercarse ya sea a x_1 , o a x_2 . En x_1 o en x_2 la partícula se detiene e invierte su dirección. Estos puntos x_1 y x_2 se llaman, por tanto, *puntos de retorno* del movimiento. Para una energía E_2 existen cuatro puntos de retorno, y la partícula puede oscilar en cualquiera de los dos valles de potencial. Para la energía E_3 existe sólo un punto de retorno del movimiento, en x_3 . Si la partícula se está moviendo inicialmente en la dirección de x negativa, se detendrá en x_3 , y luego se moverá en la dirección de x positiva. Para energías arriba de E_4 no existen puntos de retorno, y la partícula no invertirá su dirección. Su velocidad cambiará según el valor de la energía potencial en cada punto; como se muestra en el punto x_4 , la energía cinética en cualquier punto es siempre la diferencia entre la energía mecánica (E_4 , por ejemplo, como se muestra en la figura 9a) y la energía potencial $U(x)$ evaluada en ese punto.

Para el punto en que $U(x)$ tiene un valor mínimo, tal como en $x = x_0$, la pendiente de la curva es cero y, por lo

tanto, la fuerza es cero; esto es, $F(x_0) = -(dU/dx)_{x=x_0} = 0$. Una partícula en reposo en este punto permanecerá en reposo. Más aún, si la partícula se desplaza ligeramente en cualquier dirección, la fuerza, $F(x) = -dU/dx$, tenderá a regresarla, y oscilará alrededor del punto de equilibrio. Por eso, este punto de equilibrio se llama punto de *equilibrio estable*. La figura 9b muestra la fuerza $F(x)$ correspondiente a la energía potencial $U(x)$. Si la partícula se mueve ligeramente hacia la izquierda de x_0 (esto es, hacia x más pequeña), la fuerza es positiva y la partícula es empujada hacia una x más grande (esto es, de regreso hacia x_0). Si la partícula se mueve hacia la derecha de x_0 , experimenta una fuerza negativa que de nuevo la regresará hacia x_0 .

En el punto donde $U(x)$ tiene un valor máximo, tal como en $x = x_5$, la pendiente de la curva es cero, de modo que la fuerza es nuevamente cero; esto es $F(x_5) = -(dU/dx)_{x=x_5} = 0$. Una partícula en reposo en este punto permanecerá en reposo. Sin embargo, si la partícula se desplaza, incluso una pequeñísima distancia desde este punto, la fuerza $F(x)$ tenderá a empujarla más allá de la posición de equilibrio. Tal punto de equilibrio se llama, por lo tanto, punto de *equilibrio inestable*. En el punto de la figura 9b correspondiente a x_5 , que se mueve alejándose de x_5 hacia la derecha (hacia una x más grande), resulta en una fuerza positiva que empuja a la partícula hacia una x aun más grande.

En un intervalo en el cual $U(x)$ sea constante, tal como cerca de $x = x_6$, la pendiente de la curva es cero, y cero es también la fuerza; esto es $F(x_6) = -(dU/dx)_{x=x_6} = 0$. Tal intervalo se llama intervalo de *equilibrio neutro*, puesto que una partícula puede ser desplazada ligeramente sin experimentar una fuerza de repulsión o una fuerza de restitución.

De esto se deduce que si conocemos la función de energía potencial para la región de x en la cual se mueve el cuerpo, conocemos mucho acerca del movimiento del cuerpo.

Problema muestra 4 La función de energía potencial para la fuerza entre dos átomos de una molécula diatómica puede ser expresada aproximadamente como sigue:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

donde a y b son constantes positivas y x es la distancia entre los átomos. Halle (a) la separación de equilibrio entre los átomos, (b) la fuerza entre los átomos, y (c) la energía mínima necesaria para disociar la molécula (esto es, separar a los átomos desde la posición de equilibrio a $x = \infty$).

Solución (a) En la figura 10a mostramos a $U(x)$ en función de x . El equilibrio tiene lugar en la coordenada x_m , donde $U(x)$ es un mínimo, que calculamos de

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_m} = 0.$$

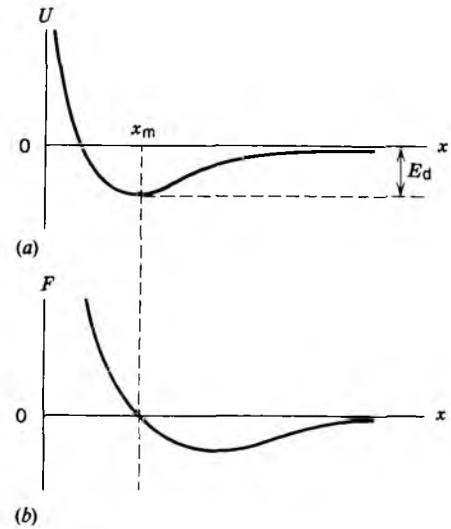


Figura 10 Problema muestra 4. (a) La energía potencial y (b) la fuerza entre dos átomos en una molécula diatómica, en función de la distancia x que separa a los átomos. Nótese que la energía potencial se hace igual a cero cuando los átomos están infinitamente separados.

Esto es,

$$\frac{-12a}{x_m^{13}} + \frac{6b}{x_m^7} = 0$$

o sea

$$x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

(b) De la ecuación 13, podemos hallar la fuerza correspondiente a esta energía potencial:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} \right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Graficamos la fuerza en función de la separación entre los átomos en la figura 10b. Cuando la fuerza es positiva (desde $x = 0$ hasta $x = x_m$), los átomos se repelen entre sí (la fuerza se dirige hacia x creciente). Cuando la fuerza es negativa (desde $x = x_m$ hasta $x = \infty$), los átomos se atraen entre sí (la fuerza está dirigida hacia x decreciente). Para $x = x_m$ la fuerza es cero; éste es el punto de equilibrio y es un punto de equilibrio estable.

(c) La energía mínima necesaria para disociar la molécula en átomos separados se llama *energía de disociación*, E_d . De la energía potencial graficada en la figura 10a, vemos que podemos separar los átomos a $x = \infty$, donde $U = 0$, siempre que $E \geq 0$. La energía mínima necesaria corresponde a $E = 0$, lo cual significa que los átomos estarán infinitamente separados ($U = 0$) y en reposo ($K = 0$) en su estado final. En el estado de equilibrio de la molécula, sin embargo, su energía es toda potencial, de manera que (véase la Fig. 10a) $E = U(x_m)$, una cantidad negativa. La energía que debemos de añadir a la molécula en su estado de equilibrio para elevar su energía desde este valor negativo hasta cero es la que hemos llamado energía de disociación E_d . Entonces

$$U(x_m) + E_d = 0,$$

o sea

$$E_d = -U(x_m) = -\frac{a}{x_m^{12}} + \frac{b}{x_m^6}.$$

Insertando el valor para x_m , hallamos que

$$E_d = \frac{b^2}{4a},$$

la cual es una cantidad positiva, como debe ser. Esta energía podría ser abastecida ejecutando un trabajo externo sobre la molécula, quizá usando fuerzas eléctricas o, de otra manera, aumentando la energía cinética de un átomo de la molécula con relación al otro.

Solución analítica para $x(t)$ (Opcional)

La descripción completa del movimiento unidimensional de una partícula está contenida en la función $x(t)$, la cual especifica la posición x de la partícula en cualquier tiempo t . Podemos obtener $x(t)$ comenzando con la ecuación 20, la cual podemos escribir así:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]},$$

o sea

$$\frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} = dt. \quad (21)$$

Integrando ambos lados de la ecuación 21 desde la posición inicial ($x = x_0$ cuando $t = t_0$) hasta una posición final cualquiera x en el tiempo t , obtenemos

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0. \quad (22)$$

Después de llevar a cabo la integración en el lado izquierdo de la ecuación 22, podemos, en principio, resolver la ecuación resultante para $x(t)$.

Al aplicar esta ecuación, el signo que deberá tomarse para la raíz cuadrada depende de si v apunta hacia la dirección de x positiva o en la negativa. Cuando v cambia de dirección durante el movimiento, puede ser necesario llevar a cabo la integración separadamente para cada parte del movimiento.

En algunos casos, podemos llevar a cabo la integridad de la ecuación 22 y obtener la solución analítica de $x(t)$. En otros casos, puede ser más conveniente hallar una solución numérica mediante una computadora, lo cual ilustramos más adelante en esta sección. Aquí llevamos a cabo la solución analítica en el caso de una partícula de masa m que se mueve en una dimensión bajo la acción de un resorte de constante de fuerza k , para el cual $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Supongamos que en $t = 0$ la partícula está situada en $x = x_0$ y que se mueve a la velocidad $v = 0$. La energía mecánica E es, por lo tanto, $\frac{1}{2}kx_0^2$ de acuerdo con la ecuación 12. En este caso la ecuación 22 da por resultado

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{x_0^2 - x^2}} = t.$$

Esta integral es de la forma estándar que puede encontrarse en las tablas de integrales:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1} \left(\frac{x}{a} \right).$$

En nuestro caso, tenemos que

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = -\cos^{-1} \left(\frac{x}{x_0} \right) \Big|_{x_0}^x = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

y, después de cierta manipulación, podemos escribir este resultado como:

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

El movimiento unidimensional de una partícula bajo la acción de la fuerza de un resorte es sinusoidal. Sabemos por experiencia que el movimiento es oscilatorio (esto es, se repite sobre la misma trayectoria); este resultado muestra que la oscilación es sinusoidal. Consideraremos al movimiento oscilatorio en términos más generales en el capítulo 15, donde obtendremos este resultado para $x(t)$ a partir de las leyes de Newton en lugar del método de la energía.

Solución numérica

Como lo hicimos en el caso de las fuerzas que dependen del tiempo (sección 6-6) o de la velocidad (sección 6-7), podemos obtener una solución numérica para el movimiento debido a fuerzas que dependen de la posición. La técnica numérica que discutimos está basada en las leyes de Newton en lugar de los métodos de la energía.

Supongamos que tenemos a una fuerza $F(x)$ que actúa sobre una partícula de masa m . En $t = 0$, la partícula está situada en x_0 y se mueve a velocidad v_0 . Nuestra meta es describir el movimiento resultante, esto es, $x(t)$ y $v(t)$ para todo tiempo t .

Dividimos el movimiento en una serie de pequeños intervalos de tiempo δt . Cada intervalo es tan pequeño que podemos tomar la aceleración como aproximadamente constante dentro del intervalo. (Dentro de un intervalo suficientemente pequeño, x no cambia mucho; entonces, $F(x)$ es casi constante, como también lo es $a = F/m$.)

En el primer intervalo, que va desde $t = 0$ hasta $t = \delta t$, la aceleración tiene un valor inicial $a_1 = F(x_0)/m$. (Los subíndices indican aquí el número del intervalo de tiempo, y la variable corresponde al valor al final del intervalo. Así, v_2 significa la velocidad al final del segundo intervalo.)

Podemos ahora adaptar fácilmente las ecuaciones cinemáticas de la aceleración constante al movimiento dentro de cada intervalo. La ecuación 15 del capítulo 2 da la velocidad al final del primer intervalo:

$$v_1 = v_0 + a_1 \delta t,$$

y la ecuación 19 del capítulo 2 da la posición al final del primer intervalo:

$$x_1 = x_0 + v_0 \delta t + \frac{1}{2} a_1 (\delta t)^2.$$

Usaremos esta nueva posición x , para hallar la aceleración (aproximadamente constante) durante el segundo intervalo, $a_2 = F(x_1)/m$, y luego aplicaremos las ecuaciones de la aceleración constante al segundo intervalo, obteniendo

$$v_2 = v_1 + a_2 \delta t$$

y

$$x_2 = x_1 + v_1 \delta t + \frac{1}{2} a_2 (\delta t)^2.$$

Podemos continuar con este procedimiento para tantos intervalos como queramos. Cuanto más pequeño sea el intervalo δt , más preciso será el resultado del cálculo.

Como ejemplo, consideremos la fuerza del resorte, $F(x) = -kx$ siendo $k = 9.6 \text{ N/m}$, actuando sobre una partícula de masa $m = 2.5 \text{ kg}$. Supongamos que la partícula inicia en $t = 0$ de la posición $x_0 = 0.5 \text{ m}$ con la velocidad $v_0 = 0$. La figura 11 muestra los resultados del cálculo numérico para $x(t)$ y $v(t)$, con 400 intervalos de 0.01 s cada uno.

En el apéndice I presentamos un programa de computadora para llevar a cabo el cálculo numérico. Usando este programa podemos analizar el movimiento unidimensional bajo la acción de cualquier fuerza que dependa de la posición de la partícula, incluso para aquellas fuerzas para las que la integral de la ecuación 10 no tenga una forma analítica para la energía potencial o para las que la integral de la ecuación 22 no pueda ser evaluada en forma analítica.

Los resultados mostrados en la figura 11 parecen ser muy conocidos: resulta que son las curvas seno y coseno. De hecho, hemos usado previamente la ecuación 22 para obtener la solución analítica en este sistema, el cual hemos demostrado que es una función coseno. El acceso numérico verifica este resultado. ■

8-5 SISTEMAS CONSERVATIVOS BIDIMENSIONALES Y TRIDIMENSIONALES (Opcional)

Hasta ahora hemos discutido la energía potencial y la conservación de la energía en sistemas unidimensionales en los que la fuerza estaba dirigida a lo largo de la línea del movimiento. Podemos fácilmente generalizar la discusión al movimiento tridimensional y obtener una expresión para la conservación de la energía mecánica.

Consideremos un sistema donde una partícula se mueve en una trayectoria y que recibe la acción de una fuerza que proviene de otras partes del sistema. Si el trabajo efectuado por la fuerza \mathbf{F} depende sólo de los puntos terminales del movimiento y es independiente de los puntos intermedios, la fuerza es conservativa. Definimos la energía potencial U por analogía con el sistema unidimensional y hallamos que es una función de tres coordenadas espaciales, esto es, $U = U(x, y, z)$. La generalización de la ecuación 9 al movimiento en tres dimensiones es

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F_x dx - \int_{y_0}^y F_y dy - \int_{z_0}^z F_z dz \quad (23)$$

o, escrito de manera más compacta en notación vectorial,

$$\Delta U = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (24)$$

donde ΔU es el cambio de la energía potencial del sistema cuando la partícula se mueve del punto (x_0, y_0, z_0) , descrito por el vector de posición \mathbf{r}_0 , al punto (x, y, z) descrito por el vector de posición \mathbf{r} . F_x , F_y y F_z son las componentes de la fuerza conservativa $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

La generalización de la ecuación 12 al movimiento tridimensional es

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0, y_0, z_0), \quad (25)$$

la cual puede ser escrita en notación vectorial como:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + U(\mathbf{r}_0), \quad (26)$$

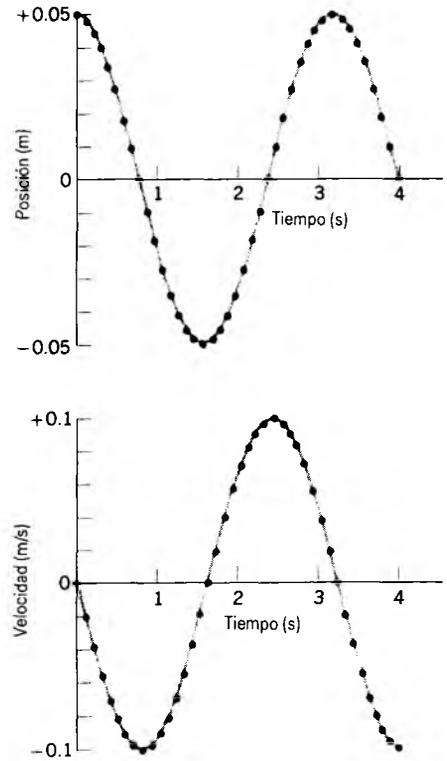


Figura 11 Solución numérica del movimiento de una partícula sobre la que actúa la fuerza de un resorte $F = -kx$. Los puntos representan valores obtenidos directamente de la solución por computadora. Por claridad, sólo uno de cada 10 puntos de la computadora se representa con un punto. Las curvas están trazadas siguiendo el esquema de los puntos y ciertamente se asemejan a las curvas seno y coseno, que son los resultados de la solución analítica.

en la cual $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ y $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2$. En términos de la energía mecánica E , la ecuación 25 puede plantearse como:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E.$$

Por último, la generalización de la ecuación 13 a tres dimensiones es*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (27)$$

Si sustituimos esta expresión de \mathbf{F} en la ecuación 24, de nuevo obtenemos una identidad, lo que demuestra que las ecuaciones 24 y 27 son equivalentes. En el lenguaje vectorial se dice que la fuerza conservativa \mathbf{F} es el valor negativo del *gradiente* de la energía potencial $U(x, y, z)$. Podemos demostrar que todas

* La derivada parcial $\partial/\partial x$ significa que tomamos a la derivada de $U(x, y, z)$ con respecto a x como si y y z fuesen constantes. Similarmente, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$ indican que diferenciamos con respecto a una variable y mantenemos como constantes a todas las demás variables.

estas ecuaciones se reducen a las ecuaciones unidimensionales correspondientes del movimiento a lo largo del eje x . En las ecuaciones 24 y 28, F representa la fuerza ejercida por el sistema cuya energía potencial es U .

Problema muestra 5 En cierto sistema de partículas confinadas al plano xy , la fuerza tiene la forma $F(x, y) = F_x i + F_y j = -kyi - kxj$, donde k es una constante positiva. (Una partícula ubicada en un punto arbitrario (x, y) es empujada hacia la línea diagonal $y = -x$ por esta fuerza. Podemos verificarlo trazando la línea $y = -x$ y dibujando las componentes de la fuerza F_x y F_y en varios puntos del plano xy .) (a) Demuestre que el trabajo efectuado por esta fuerza cuando una partícula se mueve desde el origen $(0, 0)$ hasta el punto (a, b) es independiente de la trayectoria a lo largo de las tres trayectorias mostradas en la figura 12. (b) Suponiendo que esta fuerza sea conservativa, halle la energía potencial $U(x, y)$ de este sistema. Sea que el punto de referencia $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y suponga que $U(0, 0) = 0$.

Solución (a) El trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria 1 puede ser calculado dividiendo la trayectoria en dos partes: la trayectoria 1a desde $x = 0$ hasta $x = a$ a lo largo del eje x , y la trayectoria 1b verticalmente desde el punto $(a, 0)$ hasta el punto (a, b) . El trabajo a lo largo de la trayectoria 1a es

$$W_{1a} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int F_x dx + \int F_y dy$$

$$= \int (-ky) dx + \int (-kx) dy.$$

A lo largo de la trayectoria 1a, $y = 0$ y $dy = 0$. De aquí que ambas integrales arriba escritas se cancelen y $W_{1a} = 0$. A lo largo de la trayectoria 1b, $ds = dyj$ y $x = a$, de modo que

$$W_{1b} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx) dy = (-ka) \int_0^b dy = -kab.$$

El trabajo total a lo largo de la trayectoria 1 es, por lo tanto,

$$W_1 = W_{1a} + W_{1b} = -kab.$$

A lo largo de la trayectoria 2 procedemos de modo similar:

$$W_{2a} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx) dy = 0$$

$$W_{2b} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x=0}^{x=a} (-ky) dx = (-kb) \int_0^a dx = -kab.$$

A lo largo de la trayectoria 3, $ds = dxi + dyj$, y

$$W_3 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int (-ky dx - kx dy).$$

Supongamos que la variable r varía a lo largo de la línea recta desde $(0, 0)$ hasta (a, b) . Con $y = r \text{ sen } \phi$, entonces $dy = dr \text{ sen } \phi$ (porque ϕ es constante a lo largo de la línea). También $x = r \text{ cos } \phi$ y $dx = dr \text{ cos } \phi$. Tratamos a r como nuestra variable de integración, con valores en el intervalo comprendido desde 0 en el origen hasta $d = (a^2 + b^2)^{1/2}$ en el punto (a, b) . La integral de W_3 da por resultado, entonces,

$$W_3 = \int_0^d [-k(r \text{ sen } \phi)(dr \text{ cos } \phi) - k(r \text{ cos } \phi)(dr \text{ sen } \phi)]$$

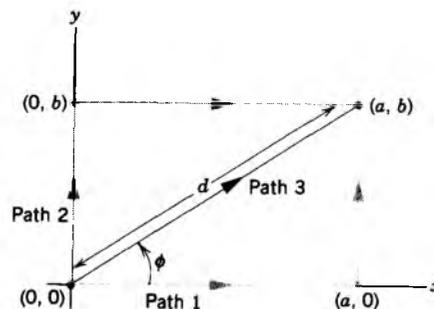


Figura 12 Problema muestra 5. Se emplean tres trayectorias diferentes para evaluar el trabajo efectuado al mover una partícula desde el origen $(0, 0)$ hasta el punto (a, b) .

$$= -2k \text{ sen } \phi \text{ cos } \phi \int_0^d r dr = -kd^2 \text{ sen } \phi \text{ cos } \phi.$$

Con $\text{sen } \phi = b/d$ y $\text{cos } \phi = a/d$, esto da por resultado $W_3 = -kab$. Así $W_1 = W_2 = W_3$. Esto no prueba que F sea conservativa (necesitaríamos evaluar todas las trayectorias para llegar a esta conclusión), pero ciertamente nos lleva a sospechar que F puede ser conservativa.

(b) La energía potencial puede calcularse a partir de la ecuación 24, la cual hemos ya, en efecto, evaluado al hallar el trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria 3. La única diferencia es que debemos integrar al punto arbitrario (x, y) en lugar de (a, b) . Simplemente reetiquetamos el punto (a, b) como punto (x, y) y entonces

$$\Delta U = U(x, y) - U(0, 0) = -W = kxy,$$

donde hemos tomado $U(0, 0) = 0$. El lector debería poder demostrar que podemos aplicar la ecuación 27 a esta función de la energía potencial y obtener la fuerza $F(x, y)$.

Si cambiamos ligeramente la fuerza a $F = -k_1yi - k_2xj$, entonces los métodos de la parte (a) demuestran que esta fuerza no es conservativa cuando $k_1 \neq k_2$. (Véase el problema 46.) Incluso si $k_1 = -k_2$, la fuerza es todavía no conservativa. Esta fuerza tiene aplicaciones importantes en el enfoque magnético de partículas cargadas eléctricamente, pero no puede ser representada por una función de energía potencial, porque no es conservativa. ■

8-6 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Cuando un objeto interactúa junto con otro u otros objetos de su entorno, somos libres de definir que nuestro sistema tiene tantos o tan pocos objetos como queramos. Para cualquier definición del sistema, la conservación de la energía se cumple siempre y cuando tengamos cuidado de seguirle la pista a las energías dentro del sistema y a las transferencias de energía entre el sistema y su entorno.

La figura 13 muestra un sistema arbitrario, alrededor del cual hemos trazado una curva cerrada imaginaria

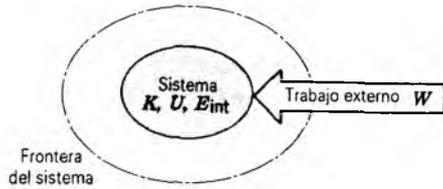


Figura 13 Un sistema encerrado dentro de la frontera tiene energía cinética K , energía potencial U (que representa sólo las interacciones entre los componentes dentro del sistema), y energía interna E_{int} . El entorno puede intercambiar energía con el sistema mediante el trabajo externo W .

llamada *frontera del sistema*. El sistema tiene, dentro de su frontera, una energía que puede incluir muchas formas posibles, algunas de las cuales se indican: la energía cinética K , la energía potencial U , y la *energía interna* E_{int} . Aquí, U se refiere a la energía potencial que resulta de la interacción de las partes del sistema entre ellas mismas; las interacciones con el entorno se representan no en términos de cambios de energía potencial sino en términos de trabajo (externo) W . Posteriormente, en esta misma sección daremos una definición precisa de la energía interna en función del potencial microscópico y de las energías cinéticas de las moléculas de que están hechos los componentes del sistema. Ejemplos de cambios de energía interna son los cambios en la disposición de las moléculas de un sistema (tal como las soldaduras microscópicas formadas por el rozamiento) y los cambios de velocidad de las moléculas de un sistema (observados como un cambio en su temperatura; la temperatura se estudia en el capítulo 22, y en el capítulo 23 se establece una relación con la energía interna).

La energía del sistema dentro de la frontera puede ser cambiada cuando el trabajo externo W se efectúa sobre el sistema por su entorno, como se representa en la figura 13. (El trabajo interno, efectuado dentro de la frontera por una parte del sistema al actuar sobre otra, no cambia la energía total, aunque puede convertir energía de una forma a otra, tal como de potencial a cinética.) Por lo tanto, podemos escribir la conservación de la energía del sistema así:

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = W, \quad (28)$$

donde W representa el trabajo externo total efectuado por todas las fuerzas a través de las cuales actúa el entorno sobre el sistema.

La figura 13 nos recuerda la importancia de la *convención de signos* que hemos elegido para el trabajo externo. El trabajo positivo realizado sobre el sistema por el entorno tiende a *aumentar* la energía del sistema. El trabajo negativo hecho sobre el sistema por el entorno (que es equivalente a trabajo positivo hecho sobre el entorno por el sistema) tiende a *disminuir* la energía del sistema.

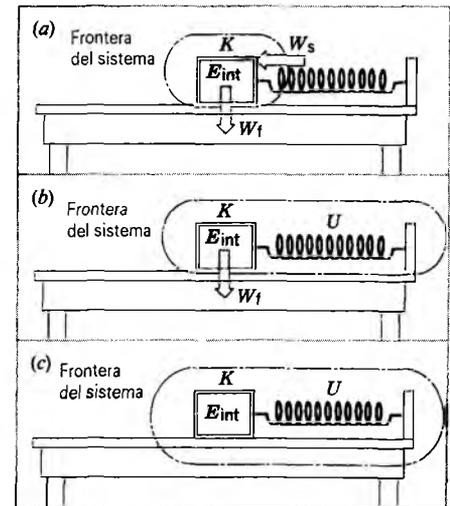


Figura 14 Un bloque sobre el que actúa un resorte se desliza sobre una mesa que ejerce una fuerza de fricción. (a) El sistema consiste solamente en el bloque; la fuerza del resorte y la fricción efectúan un trabajo sobre el sistema, cambiando su energía. (b) El sistema consta ahora del bloque y el resorte, y posee tanto energía cinética como energía potencial. (c) El sistema incluye ahora la mesa. La fuerza de fricción es ahora una fuerza interna y contribuye a la energía interna del sistema.

Ilustremos estos principios considerando el sistema bloque-resorte de la figura 1, suponiendo ahora que existe una fuerza de fricción entre el bloque y la mesa sobre la que se desliza. Definiremos primero que nuestro sistema es el bloque mismo (Fig. 14a). La figura muestra dos transferencias de energía a través de la frontera del sistema: el trabajo conservativo W_s positivo efectuado sobre el bloque por el resorte y el trabajo no conservativo W_f negativo efectuado sobre el bloque por la fuerza de fricción ejercida por la mesa. Para este sistema, la conservación de la energía puede escribirse así:

$$\Delta K + \Delta E_{int} = W_s + W_f. \quad (29)$$

Aquí $\Delta U = 0$, porque el sistema que está dentro de la frontera no experimenta cambio alguno de energía potencial. El resorte no es parte del sistema, de modo que no se considera la energía potencial del resorte; en cambio, entendemos al resorte como parte del entorno a través del cual el trabajo conservativo W_s opera sobre el sistema. Nótese en la figura 14a las direcciones de las flechas que indican las transferencias de energía; la ecuación 29 indica que el trabajo positivo efectuado por el resorte (el cual damos por sentado que se comprime a partir de su longitud de relajamiento) tiende a aumentar la energía del bloque, y el trabajo negativo efectuado por la superficie horizontal tiende a disminuir la energía del bloque.

Consideremos ahora que el sistema consta del bloque y el resorte (Fig. 14b). El sistema tiene ahora una energía potencial (la asociada a la fuerza del resorte). La fuerza de fricción es la única fuerza externa que efectúa un trabajo sobre el sistema. Para esta definición del sistema escribiremos la conservación de la energía como:

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W_f. \quad (30)$$

La energía del sistema es ahora $U + K + E_{\text{int}}$; en este caso, las transferencias de energía entre el resorte y el bloque no cambian la energía del sistema. La fuerza del resorte es una *fuerza interna* que puede transferir energía dentro del sistema de una forma a otra ($U \leftrightarrow K$), pero no puede cambiar la energía total del sistema. El trabajo negativo (de fricción) de la superficie horizontal puede disminuir la energía del sistema.

Finalmente, definamos que el sistema incluye a la mesa (Fig. 14c). Ahora no existe una fuerza externa, conservativa o no, que sea responsable de las transferencias de energía que penetran las fronteras del sistema. Con esta definición del sistema, el trabajo externo es cero, y entonces

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0. \quad (31)$$

La fuerza de fricción es ahora una fuerza interna, junto con la fuerza del resorte. La energía puede ser transferida, dentro del sistema, de energía mecánica $U + K$ del bloque + el resorte a energía interna del bloque + la mesa, pero la energía total (mecánica + interna) permanece constante. Supongamos, por ejemplo, que soltamos al bloque desde el reposo con el resorte comprimido. El bloque se desliza por la mesa hasta que llega al reposo. En este caso $\Delta K = 0$ (porque $K_f = K_i = 0$), y por lo tanto $\Delta E_{\text{int}} = -U$. La pérdida de energía potencial que estaba originalmente almacenada en el sistema resulta en un aumento de la energía interna del sistema. De este análisis no podemos determinar los cambios individuales en la energía interna del bloque y de la mesa, sólo el cambio total del sistema en conjunto.

La fuerza de fricción es un ejemplo de una fuerza no conservativa, disipadora. En un sistema mecánico cerrado como el que aquí se ilustra, la energía mecánica se transforma en energía interna por la fuerza de la fricción. La *energía mecánica no se conserva en este caso, siendo compensada la pérdida de energía mecánica por una ganancia equivalente de la energía interna*. (No todas las fuerzas no conservativas son disipadoras; algunas fuerzas no conservativas, como la fuerza magnética, pueden *aumentar* la energía mecánica de un sistema. Aun la fuerza de la fricción puede, en ciertas condiciones dar por resultado un aumento en la energía mecánica del sistema. ¿Se le ocurre a usted algún ejemplo en el que esto pueda suceder?)

Nótese que en los ejemplos anteriores hemos expresado la energía potencial macroscópica de un resorte como un término explícito. Podríamos haber considerado la energía almacenada en el resorte como una parte de la energía interna del sistema. Sin embargo, por conveniencia, elegimos separar términos macroscópicos que puedan fácilmente ser tomados en cuenta, dejando en E_{int} los términos microscópicos restantes que no están incluidos en U . Esto es, el reordenamiento de las moléculas del resorte se halla incluido en U , mientras que el reordenamiento de las moléculas del bloque y de la mesa se incluyen en E_{int} . Esta clasificación un tanto arbitraria se hace por conveniencia al discutir la energía de este sistema particular.

La ecuación 28 representa un primer paso en el avance de una ley de la conservación de la energía *macánica* a una ley generalizada de la conservación de la energía. Esto es, esta ley generalizada puede enunciarse como sigue:

En un sistema aislado, la energía puede ser transformada de una clase a otra, pero no puede ser creada o destruida; la energía total del sistema permanece constante.

Por "aislado" nos referimos a que no se efectúa sobre el sistema ningún trabajo externo, conservativo o no conservativo. Esta definición de la conservación de la energía es una generalización de nuestra experiencia, hasta ahora no desmentida por ningún experimento de laboratorio o por observación de la naturaleza.

En algunas ocasiones, en la historia de la física, esta ley parecía tener fallas, pero su aparente invalidez estimuló la búsqueda de alguna otra forma de energía que pudiera ser incluida en una ley aún más general que fuera capaz de explicar la observación. Por ejemplo, en la década de 1920 se hicieron estudios experimentales de la desintegración beta nuclear, una forma de desintegración radioactiva en que los electrones son emitidos por un núcleo atómico. Estos experimentos demostraron que los electrones eran emitidos con menor energía de la esperada, con base en el conocimiento de la energía total del núcleo antes y después de la desintegración. Se hicieron muchas sugerencias para explicar esta energía "faltante". Según se propuso en ese entonces, cuando los electrones salían del núcleo, chocaban con los electrones atómicos y cedían algo de su energía en estas colisiones. Si esto fuera así, este proceso causaría un aumento en la energía interna del sistema consistente en los electrones emitidos más los átomos desintegrados. Tal aumento en la energía interna se revelaría como una elevación en la temperatura de la muestra radioactiva. Experimentos precisos no lograron revelar ningún aumento en la temperatura, y la hipótesis fue rechazada. En 1930, el físico suizo Wolfgang Pauli expuso la hipótesis correcta. Pauli propuso que, además del electrón, se emitía una *segunda* partícula en la desintegración beta que llevaba consigo la energía "faltante".

Esta partícula, llamada *neutrino*, daba muestras de ser extremadamente evasiva; si bien la hipótesis de Pauli fue pronto confirmada por métodos indirectos, tuvieron que transcurrir 25 años más hasta que el neutrino pudiera ser observado directamente. Esta predicción de la existencia del neutrino, basada en la fe sobre la conservación de la energía, tuvo un efecto extraordinario en el desarrollo de la física de las partículas elementales en las décadas siguientes. El neutrino es una de las partículas elementales más fundamentales, y el estudio de sus propiedades y sus interacciones con otras partículas ha contribuido a nuestra comprensión de la estructura subyacente del mundo material.

Problema muestra 6 Un aficionado de los Cachorros de Chicago deja caer una bola de béisbol (de masa $m = 0.143$ kg) desde la cima de la Torre Sears a una altura h de 443 m (= 1450 ft). La bola alcanza una velocidad terminal v de 42 m/s (véase la sección 6-7). Halle el cambio en la energía interna de la bola y del aire circundante durante la caída a la superficie de la Tierra.

Solución Contemplemos al sistema como formado por la bola de béisbol, el aire a través del cual cae, y la Tierra. Ninguna fuerza externa actúa sobre este sistema; la fuerza de la gravedad de la Tierra sobre la bola y la fuerza del arrastre del aire sobre la bola son fuerzas internas del sistema, como lo hemos definido ya. El cambio en la energía potencial del sistema es

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i = 0 - mgh \\ &= -(0.143 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(443 \text{ m}) = -621 \text{ J}.\end{aligned}$$

El cambio de la energía cinética durante la caída es

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}(0.143 \text{ kg})(42 \text{ m/s})^2 = 126 \text{ J}.$$

(Despreciamos aquí el movimiento de la Tierra bajo la atracción gravitatoria de la bola.) Según la ecuación 28, podemos expresar la conservación de la energía como: $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$, porque no existe un trabajo externo efectuado sobre el sistema. Resolviendo para la energía interna, obtenemos

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta U - \Delta K = -(-621 \text{ J}) - 126 \text{ J} = 495 \text{ J}.$$

Este aumento de la energía interna puede ser observado como una elevación de temperatura de la bola y el aire que la rodea, o quizás como la energía cinética del aire dejada en el trayecto por la bola al caer. Usando la ecuación 28 solamente, no podemos situar a la energía entre estas formas. Para hacerlo, debemos de aislar a la bola o al aire como nuestro sistema y calcular el trabajo efectuado por las fuerzas externas que actúan sobre él. Este procedimiento, que requiere un conocimiento de la fuerza de arrastre entre la bola y el aire así como los detalles del movimiento de la bola, es demasiado complejo para que lo resolvamos aquí.

En este problema hemos supuesto que el aumento de la energía interna permanece dentro del sistema, como hemos definido ya. En la práctica, las diferencias de temperatura entre la bola o el aire y su entorno darán por resultado otra clase de transferencia de energía llamada *calor*, la cual estudiaremos en el capítulo 25.

Problema muestra 7 Un bloque de 4.5 kg es empujado hacia arriba por un plano inclinado a 30° con una velocidad inicial v de 5.0 m/s. El bloque recorre una distancia $d = 1.5$ m por el plano mientras su velocidad disminuye gradualmente hasta cero. (a) ¿Cuánta energía mecánica pierde el bloque en este proceso debido a la fricción? (b) El bloque se desliza luego hacia abajo por el plano desde el reposo. Suponiendo que la fricción produzca la misma pérdida de energía mecánica durante el trayecto hacia abajo, ¿cuál es la velocidad del bloque cuando pasa por su posición inicial?

Solución (a) Al igual que lo hicimos en el problema muestra 6, despreciamos los cambios en la energía de la Tierra en nuestro cálculo y consideramos los cambios en la energía cinética del bloque solamente. El cambio en la energía potencial es

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i = mgh - 0 \\ &= (4.5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ m})(\text{sen } 30^\circ) = 33 \text{ J}.\end{aligned}$$

El cambio en la energía cinética entre la parte inferior y la superior del plano es

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}(4.5 \text{ kg})(5.0 \text{ m/s})^2 = -56 \text{ J}.$$

El cambio en la energía mecánica es

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = 33 \text{ J} - 56 \text{ J} = -23 \text{ J}.$$

Nótese que, de acuerdo con la ecuación 28, esta pérdida en la energía mecánica puede escribirse como $-\Delta E_{\text{me}} + W_f$. Aquí, ΔE_{me} es una cantidad positiva que representa el aumento en la energía interna del bloque (no del bloque + el plano), y W_f es el trabajo externo (negativo) efectuado sobre el bloque por la fuerza de fricción del plano. Sin información adicional, no podemos calcular estas cantidades por separado.

(b) Ahora $\Delta K'$ representa el cambio en la energía cinética entre el primer paso y el segundo por el fondo del plano. El cambio correspondiente en la energía potencial $\Delta U'$ es de cero. La ecuación 28 nos da

$$\Delta K' = -\Delta U' + (-\Delta E'_{\text{int}} + W'_f).$$

La cantidad dentro del paréntesis tiene el valor $2(-23 \text{ J}) = -46 \text{ J}$, porque se nos dice que la pérdida en la energía mecánica durante el trayecto hacia abajo es igual a la del trayecto hacia arriba. Así $\Delta K' = K_f - K_i = -46 \text{ J}$, y la energía cinética en el fondo del plano es

$$K_f = 56 \text{ J} - 46 \text{ J} = 10 \text{ J}.$$

La velocidad correspondiente es

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(10 \text{ J})}{4.5 \text{ kg}}} = 2.1 \text{ m/s}.$$

Base microscópica de la energía interna (Opcional)

Consideremos un objeto como el bloque deslizante estudiado anteriormente o la bola de béisbol en caída del problema muestra 6. El teorema trabajo-energía aplicado a determinada partícula (digamos, un átomo) dentro del sistema compuesto puede escribirse como $\Delta K_i = W_i$, donde el subíndice i indica una de las N partículas del objeto. Aquí W_i significa el trabajo total debido a todas las fuerzas que actúan sobre esa partícula. Podemos

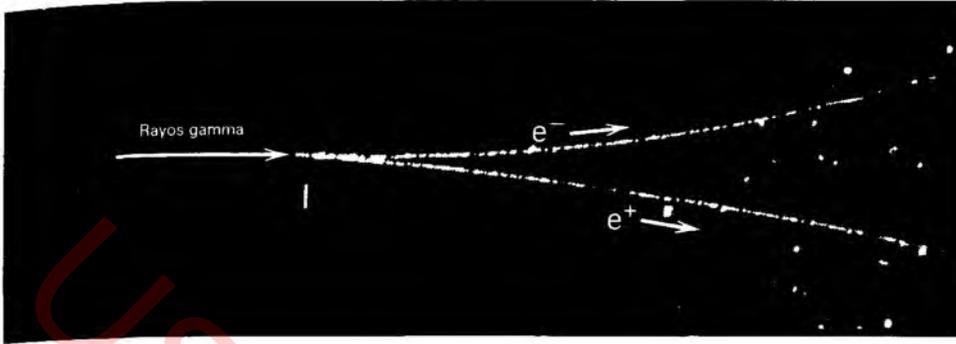


Figura 15 La radiación gamma ha convertido a su energía en un positrón y un electrón. Las dos partículas dejan rastros visibles en la cámara de burbujas donde fueron creadas. Los rastros son curvos, porque un campo magnético intenso ejerce una fuerza que siempre es perpendicular a la velocidad de las partículas, pero de dirección opuesta para las partículas de cargas eléctricas opuestas.

aplicar el teorema trabajo-energía separadamente a cada partícula del sistema y luego sumar las N ecuaciones resultantes para obtener

$$\Sigma \Delta K_i = \Sigma W_i, \quad (32)$$

donde el subíndice i va desde 1 hasta N . En el lado derecho de la ecuación 32, dividimos el trabajo total efectuado sobre el objeto en dos partes, tales que $\Sigma W_i = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}$. El término W_{int} incluye el trabajo efectuado por las fuerzas que los átomos o las moléculas del sistema ejercen entre sí, y el término W_{ext} incluye el trabajo efectuado por todas las fuerzas externas. En el lado izquierdo de la ecuación 32, dividimos la energía cinética total en dos partes: una parte, indicada por K , representa el movimiento global de todo el objeto; la segunda parte, indicada por K_{int} , representa el total de todos los movimientos internos al azar de los átomos o de las moléculas del objeto. (El procedimiento para hacer esta división será explicado en el capítulo 9 cuando consideremos el movimiento del centro de masa; por ahora, supondremos simplemente que tal división es posible.) Podemos entonces reescribir la ecuación 32 así:

$$\Delta K + \Delta K_{\text{int}} = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}. \quad (33)$$

Suponemos que, a nivel microscópico, todas las fuerzas son conservativas, y así el trabajo interno total puede ser sustituido por una energía potencial interatómica o intermolecular total correspondiente, de modo que $W_{\text{int}} = -\Delta U - \Delta U_{\text{int}}$. Pudimos haberla expresado simplemente como $-\Delta U_{\text{int}}$, pero por conveniencia agruparemos algunas energías potenciales microscópicas en un término macroscópico fácilmente calculable representado por U , como la energía potencial del resorte estudiada anteriormente. Haciendo esta sustitución y reordenando los términos, obtenemos

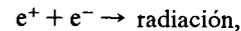
$$\Delta U + \Delta K + (\Delta U_{\text{int}} + \Delta K_{\text{int}}) = W_{\text{ext}}. \quad (34)$$

Con $\Delta E_{\text{int}} = \Delta U_{\text{int}} + \Delta K_{\text{int}}$, obtenemos la ecuación 28. Entonces, el término de la energía interna se sigue directamente al aplicar el teorema trabajo-energía microscópicamente a un objeto. ■

8-7 MASA Y ENERGÍA* (Opcional)

Un tipo común de radioactividad que se observa fácilmente en el laboratorio es la *emisión de positrones*, proceso por el cual

un núcleo atómico emite un positrón, que es una partícula de la misma masa que el electrón pero de carga eléctrica opuesta (positiva). Cuando los positrones encuentran a los electrones en la materia ordinaria, observamos el proceso llamado *aniquilación positrón-electrón*. En este proceso el electrón y el positrón desaparecen y, en su lugar, encontramos solamente radiación electromagnética. Simbólicamente, podemos representar este proceso así:



donde e^+ y e^- representan al positrón y al electrón, respectivamente. La figura 15 ilustra el proceso inverso en que la radiación gamma se convierte en un electrón y un positrón; este proceso se conoce como *producción de pares*.

Consideremos un sistema (Fig. 16a) consistente en un positrón y un electrón de energías cinéticas pequeñas, despreciables, y separados por una distancia suficientemente grande para que la energía potencial (debida a la fuerza electrostática entre ellos) pueda ser también despreciada. Llegará un momento en que, el positrón y el electrón se encuentren y se aniquilen, y la radiación resultante escape por la frontera del sistema (Fig. 16b). Por medidas del entorno apropiadas, podemos determinar la energía de la radiación que escapa del sistema y hallamos que, en cada suceso de aniquilación, la radiación lleva 1.022 MeV de energía fuera del sistema. Cuando esta radiación es absorbida por los átomos del entorno, se efectúa un trabajo sobre el entorno por la cantidad de 1.022 MeV por las fuerzas electromagnéticas asociadas con la radiación. Puesto que la ecuación 28 está expresada en términos del trabajo efectuado *sobre* un sistema *por* su entorno, consideramos en este caso que el entorno efectúa un trabajo negativo W en la cantidad de -1.022 MeV sobre el sistema.

Al aplicar la ecuación 28 a este sistema, ello nos lleva a una violación aparente de la conservación de la energía; el lado derecho de la ecuación 28 es igual al valor negativo W , pero el cambio de energía correspondiente en el lado izquierdo necesario para mantener la igualdad no es obvio. Podríamos, por ejemplo, proponer una disminución en la energía interna que sea numéricamente igual a W , pero no está nada claro cuál es la clase de energía interna presente en el sistema original que falta en el sistema final.

La solución a este dilema puede hallarse por la famosa ecuación de Albert Einstein propuesta en 1905, que relaciona a la masa con la energía, mucho antes de que se llevaran a cabo experimentos tales como la aniquilación electrón-positrón:

$$E_0 = mc^2, \quad (35)$$

* Esta sección puede ser omitida o pospuesta hasta que se estudie la relatividad en el capítulo 21.

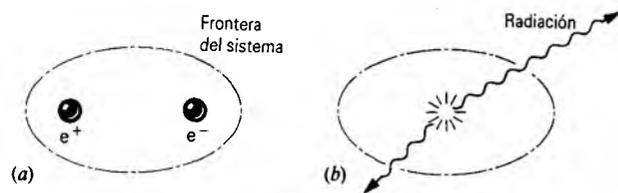


Figura 16 (a) Un sistema consistente en un positrón e^+ y un electrón e^- . (b) Después de que el positrón y el electrón se aniquilan, la radiación resultante sale por la frontera del sistema.

donde c representa la velocidad de la luz.* Esta ecuación nos dice que la masa es una forma de energía y que una partícula de masa m tiene asociada a ella una *energía en reposo* E_0 dada por mc^2 . Esta energía en reposo puede ser considerada como la energía interna de un cuerpo en reposo. Así, el electrón y el positrón tienen energía interna únicamente a causa de sus masas. Para cada partícula, podemos calcular la energía de reposo así:

$$E_0 = mc^2 = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{1.60 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}} = 0.511 \text{ MeV.}$$

La energía interna total (energía en reposo) de las dos partículas iniciales es, entonces, $2(0.511 \text{ MeV}) = 1.022 \text{ MeV}$, por lo que el cambio en la energía de reposo del sistema es -1.022 MeV . *El trabajo negativo efectuado sobre el sistema de la figura 16 está equilibrado por una pérdida equivalente en la energía de reposo del sistema.* Tomando en cuenta apropiadamente las energías en reposo de las partículas, hallamos que la energía se conserva.

La ecuación 35 nos dice también que siempre que sumemos energía ΔE a un objeto material que permanezca en reposo, aumentamos su masa en una cantidad $\Delta m = \Delta E/c^2$. Si comprimimos un resorte y aumentamos su energía potencial en una cantidad ΔU , entonces su masa aumenta en U/c^2 . Si elevamos la temperatura de un objeto, aumentando su energía interna en ΔE_{int} durante el proceso, aumentamos su masa en $\Delta E_{\text{int}}/c^2$. Estos cambios de masa son muy pequeños y normalmente están más allá de nuestras posibilidades de medirlos en el caso de objetos ordinarios (a causa de que c^2 es un número muy grande); pero en el caso de desintegraciones y reacciones de núcleos y de partículas subnucleares, el cambio de masa relativo puede ser lo suficientemente grande como para ser medible.

Dentro de la frontera del sistema de la figura 13, los cambios en la energía potencial U y en la energía interna E_{int} pueden, entonces, ser asociados con cambios en la energía de reposo E_0 del sistema. En este caso, podemos escribir la ecuación 28 así:

$$\Delta E_0 + \Delta K = W. \quad (36)$$

Aquí, W representa la energía (en forma de trabajo) intercambiada entre el sistema y su entorno. Nótese que el lado izquierdo de la ecuación 36 incluye solamente dos términos: la energía de

* Aunque los físicos están de acuerdo con los resultados de los cálculos relativistas, no existe un acuerdo universal sobre la interpretación de la ecuación 35. Véase "The Concept of Mass", por Lev B. Okun, *Physics Today*, junio de 1989, pág. 31, que resume los puntos de vista sustentados por muchos físicos y adaptados para su uso en este libro.

reposo (la cual incluye todos los tipos de energía de un sistema en reposo) y la energía de movimiento (cinética). Aplicada al caso de la aniquilación electrón-positrón (donde $\Delta K = 0$), la ecuación 36 muestra directamente que el trabajo externo (negativo) asociado con la radiación tiene su origen en una disminución de la energía en reposo del sistema original.

Examinando la situación de la figura 16b en un tiempo después de que la radiación ha sido emitida pero antes de que haya sido absorbida por el entorno, hallamos que la ecuación 35 nos conduce a otra conclusión. Para que la energía se conserve en ese tiempo intermedio, debemos asignar a la radiación una masa $\Delta m = \Delta E_0/c^2$. Entonces la ecuación 35 afirma que *la energía tiene masa*.

Por lo tanto concluimos que la conservación de la energía es equivalente a la conservación de la masa. Como escribió Einstein: "La física prerrelativista contiene dos leyes de conservación de importancia fundamental, esto es, la ley conservativa de la energía y la ley de conservación de la masa; estas dos aparecen allí como completamente independientes entre sí; por la teoría de la relatividad se funden en *un solo principio*".

Podemos aplicar la ecuación 36 a otros sistemas aislados que consten de partículas y radiación. Consideremos a una estrella como el Sol como nuestro sistema. El Sol irradia una energía de $4 \times 10^{26} \text{ J}$ cada segundo. Como lo hicimos en el caso de la aniquilación electrón-positrón, vemos a esta energía radiante como una disminución en la energía en reposo del sistema, y el cambio de masa correspondiente es

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{-4 \times 10^{26} \text{ J}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = -4 \times 10^9 \text{ kg}$$

por cada segundo. Esta disminución de masa es bastante significativa según normas ordinarias, pero bastante pequeña comparada con la masa total del Sol ($2 \times 10^{30} \text{ kg}$). En un año, la masa del Sol disminuye en una fracción de tan sólo 6×10^{-14} .

Tracemos ahora la frontera del sistema alrededor de la supernova 1987 (Fig. 17), la primera en casi 400 años que fue visible a simple vista.* La supernova es una estrella que ha empleado su provisión de combustible termonuclear y explota de manera espectacular. En cuestión de unos 10 segundos, se cree que la supernova 1987 convirtió alrededor del 10% de su energía en reposo (aproximadamente equivalente a la masa de dos soles) en radiación y otras formas de energía. El cambio en energía en reposo correspondiente a dos masas solares sería

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2 = -2(2 \times 10^{30} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = -4 \times 10^{47} \text{ J.}$$

La energía irradiada durante ese lapso de 10 segundos, que equivale a una potencia de $4 \times 10^{46} \text{ W}$, es ¡casi igual a la del total combinado de todas las demás estrellas y galaxias del resto del Universo visible!

Problema muestra 8 Dos bolas de mastiche de 35 g son arrojadas una contra otra, cada una a una velocidad de 1.7 m/s. Las bolas chocan de frente y quedan pegadas entre sí. ¿En cuánto difiere la masa resultante de las dos bolas combinadas de la suma de las masas de las dos bolas por separado?

Solución Tratemos a las dos bolas de mastiche como un sistema aislado y apliquemos la ecuación 36. Existe un cambio

* Véase "The Great Supernova of 1987", por Stan Woosley y Tom Weaver, *Scientific American*, agosto de 1989, pág. 32.



Figura 17 La supernova 1987, en el centro, destaca con su brillo de las demás estrellas de esta fotografía.

(negativo) en la energía cinética de este sistema, con un valor final de cero después de la colisión y un valor total K_i de las dos bolas antes de la colisión. No interviene aquí ningún trabajo externo, de manera que tenemos

$$\Delta K + \Delta E_0 = (0 - K_i) + \Delta E_0 = 0,$$

o sea

$$\Delta E_0 = K_i = 2(\frac{1}{2}mv^2) = (0.035 \text{ kg})(1.7 \text{ m/s})^2 = 0.101 \text{ J}.$$

Este aumento de la energía en reposo podría ser en forma de energía interna, dando por resultado, quizás, un incremento de la temperatura del sistema combinado. El incremento de masa correspondiente es

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0.101 \text{ J}}{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 1.1 \times 10^{-18} \text{ kg}.$$

Un incremento de masa tan diminuto está, desesperanzadamente, más allá de nuestra posibilidad de medirlo.

Problema muestra 9 En un experimento llevado a cabo en 1989 en el Stanford Linear Collider, se produjeron partículas Z^0 cuando un haz de electrones chocó de frente con un haz de positrones de la misma energía cinética. Halle la energía cinética de los dos haces necesaria para producir el Z^0 , que tiene una energía en reposo de 91.2 GeV (1 GeV = 10^9 eV).

Solución Como en la colisión entre las bolas de masique consideradas en el problema muestra 8, supongamos que no existe un trabajo externo (es decir, no hay radiación) para tomar en cuenta antes o después de la colisión. El cambio en la energía en reposo entre el estado inicial (un electrón y un

positrón de 0.511 MeV de energía en reposo cada uno) y el estado final (el Z^0) es

$$\Delta E_0 = 91.2 \text{ GeV} - 2(0.511 \text{ MeV}) = 91.2 \text{ GeV},$$

siendo aquí bastante insignificante la energía de reposo total del electrón y el positrón (1.022 MeV = 0.001022 GeV). De la ecuación 36, obtenemos

$$\Delta K = -\Delta E_0 = -91.2 \text{ GeV} = K_f - K_i.$$

Si suponemos que el Z^0 se produjo en reposo, entonces $K_f = 0$ y las energías del positrón y del electrón deben ser, cada una, $0.5(91.2 \text{ GeV}) = 45.6 \text{ GeV}$. Al contrario del problema muestra anterior, el cambio relativo en la energía (o en la masa) en reposo dentro del sistema es sustancial en este caso, siendo la masa final alrededor de 100,000 veces la masa inicial.* ■

8-8 CUANTIZACIÓN DE LA ENERGÍA (Opcional)

En la sección anterior hemos visto cómo la conservación de la energía es compatible con la relatividad; por lo tanto, conforme a ello, ampliamos nuestro concepto de energía para incluir la energía en reposo de un sistema. Aquí consideraremos la conservación de la energía en un caso límite diferente, en donde nos acercamos al *límite cuántico* de los sistemas en la escala atómica o nuclear.

Si damos al sistema bloque-resorte alguna energía inicial y lo soltamos, el sistema oscilará de un lado al otro. Si existe fricción, el movimiento desaparecerá gradualmente. La pérdida de energía del sistema debido al trabajo externo de la fuerza de fricción parece ser llana y continua.

Por otra parte, consideremos un oscilador consistente en una molécula diatómica: dos átomos acoplados por una fuerza que actúa a modo de resorte. Si le proporcionamos a este sistema alguna energía y permitimos que oscile, hallamos que emite radiación y termina por disipar tanta cantidad de energía como puede. Sin embargo, existe una diferencia importante entre este oscilador atómico y el sistema bloque-resorte: *en la escala atómica, los cambios de movimiento no ocurren continuamente sino en saltos discretos discontinuos*. La conservación de la energía se aplica en esta escala microscópica: la diferencia de energía entre los estados inicial y final es igual a la energía ΔE transportada por la radiación, o sea que

$$|\Delta E| = E_i - E_f. \quad (37)$$

Nótese que $E_i > E_f$ si el sistema entrega energía.

Las radiaciones emitidas en la escala atómica son discretas: sólo son posibles ciertos cambios de energía, al contrario de lo que sucede en la situación clásica donde el cambio de energía puede ser tratado como una variable continua. Como veremos en el capítulo 49 de la versión extendida de este texto, los saltos de la energía permitidos se relacionan con la frecuencia ν del oscilador de acuerdo con

$$E_i - E_f = h\nu, \quad (38)$$

* Véase "The Stanford Linear Collider", por John R. Rees, *Scientific American*, octubre de 1989, pág. 58.

donde h es una constante llamada la *constante de Planck* y que tiene el valor

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$= 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}.$$

La figura 18 muestra un esquema del proceso en el que un sistema (quizás un átomo o un núcleo) salta desde una energía inicial E_i hasta una energía final E_f , con la emisión de radiación de energía $h\nu$. Este haz discreto de energía recibe el nombre de *cuanto* (término que proviene del latín *quantum*), y los estados de energía se dice que se hallan *cuantizados*, lo que significa que tienen valores definidos y discretos.

La figura 19 muestra un ejemplo de algunos estados de energía cuantizados de un átomo de sodio. El átomo puede existir en cualquiera de estos estados de energía, pero no puede tener una energía intermedia entre estos valores permitidos. Esta estructura es responsable de las radiaciones discretas emitidas por los átomos; por ejemplo, el sodio emite luz de un color amarillo característico (como puede verse en las lámparas de vapor de sodio en las calles) cuando el átomo salta del estado de energía E_1 (llamado primer estado excitado) al estado E_g (llamado estado base).

La figura 20 muestra la estructura "cuantizada" de un oscilador clásico, como el péndulo. Los estados pueden ser discretos, pero están tan próximos entre sí que los saltos entre estados individuales pueden ser considerados como un proceso continuo. Supongamos que la frecuencia del péndulo es de una oscilación por segundo ($\nu = 1/\text{s}$). Según la ecuación 38 el "cuanto de energía" tiene el valor

$$h\nu = (6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(1 \text{ s}^{-1}) = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}.$$

Esta diminuta cantidad está muy lejos de nuestra posibilidad de determinar energías en objetos macroscópicos, como el péndulo, y, por lo tanto, esta estructura discreta no puede ser observada. En un péndulo, por ejemplo, corresponde a cambiar la amplitud de la oscilación por una distancia ¡del orden de 10^{-32} m, o alrededor de $1/10^{22}$ del diámetro de un átomo! Podemos prescindir perfectamente del comportamiento cuántico de los objetos ordinarios.

La conservación de la energía en la escala microscópica puede ser probada observando las radiaciones emitidas por átomos o núcleos que efectúan saltos discretos entre niveles, ya sea en la emisión de radiación (como en la Fig. 18) o en el proceso inverso en el que un átomo originalmente en el estado base (el estado de energía más bajo) *absorbe* un cuanto de radiación y da un salto hacia arriba al estado de mayor energía. Tales experimentos, que implican emisión y absorción, pueden llevarse a cabo con precisión extraordinaria, del orden de 1 parte en 10^{15} de la diferencia de energía entre los estados. Cada experimento de esta clase ha sido consistente con la conservación de energía en la escala microscópica. ■

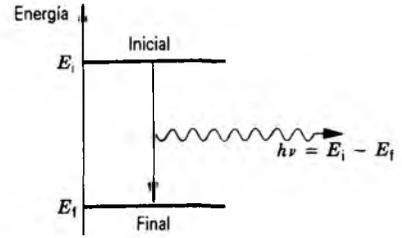


Figura 18 Un sistema en el estado inicial emite radiación de energía $h\nu$ que lo conduce al estado final.

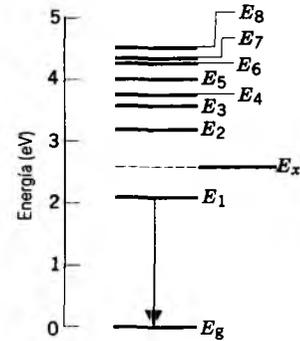


Figura 19 Algunos de los niveles de energía de un átomo de sodio, correspondientes a los diversos estados cuánticos en los que puede existir el átomo. El estado inferior, indicado por E_g , se denomina estado base. El átomo emite una luz amarillo-sodio característica cuando cambia del estado de energía E_1 al estado base, como se indica con la flecha vertical. El átomo puede existir solamente en los estados indicados; no se permite, por ejemplo, que tenga la energía E_x mostrada entre E_2 y E_1 .

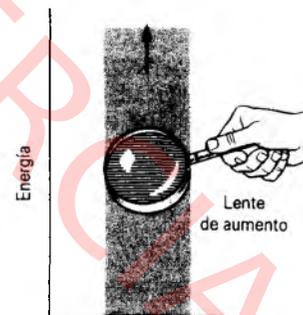


Figura 20 Los niveles de energía de un péndulo también están cuantizados, pero los niveles están tan próximos entre sí, que no pueden distinguirse, ni siquiera bajo el escrutinio más escrupuloso. Ninguna lente de aumento podría nunca revelarnos la estructura cuantizada de un péndulo.

PREGUNTAS

1. ¿Qué le pasa a la energía potencial que pierde un elevador al bajar desde la parte más alta de un edificio hasta que se detiene en la planta baja?
2. Las carreteras en la montaña rara vez suben en línea recta la ladera de la montaña, sino que la suben serpenteando gradualmente. Explique por qué.

3. Las bolsas de aire reducen notablemente el riesgo de daños personales en un accidente de automóvil. Explique cómo lo hacen, en términos de transferencia de energía.
4. El salto con pértiga (o garrocha) sufrió una transformación cuando la pértiga de madera fue sustituida por la pértiga de fibra de vidrio. Explique por qué.
5. Dejamos caer un objeto y observamos que rebota de una a una y media veces su altura original. ¿Qué conclusiones podemos extraer?
6. Una pelota que se deja caer a tierra no rebota más alto del punto donde se la soltó. Sin embargo, las salpicaduras desde el fondo de una cascada pueden en ocasiones elevarse hasta más arriba que la altura de ésta. ¿Por qué es así?
7. Un terremoto puede liberar la energía suficiente para devastar una ciudad. ¿Dónde reside esta energía un instante antes de que ocurra el terremoto?
8. La figura 21 muestra un tubo circular de vidrio asegurado a una pared vertical. El tubo está lleno de agua excepto por una burbuja de aire que temporalmente está en reposo en la parte baja del tubo. Explique el movimiento de la burbuja que sigue a continuación en términos de transferencia de energía. Desprecie las fuerzas tanto viscosa como de fricción, primero, y después explíquelo teniendo en cuenta completamente.

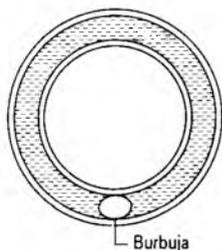


Figura 21 Pregunta 8.

9. En el problema muestra 3 (véase la Fig. 8) concluimos que la velocidad del carrito de la montaña rusa en el fondo del carril no depende en absoluto del perfil del mismo. ¿Sería esto así en el caso de que hubiera fricción?
10. Teniendo en cuenta cómo la energía potencial de un sistema de dos moléculas idénticas se relaciona con la separación de sus centros, explique por qué un líquido que se reparte en una capa delgada tiene más energía potencial que la misma masa de líquido en forma esférica.
11. Un péndulo en oscilación llega finalmente al reposo. ¿Es ésta una violación de la ley de la conservación de la energía mecánica?
12. Un artículo científico ("The Energetic Cost of Moving About", por V. A. Tucker, *American Scientist*, julio-agosto de 1975, pág. 413) asegura que caminar y correr son dos formas de locomoción extremadamente ineficientes y que los pájaros, los peces y los ciclistas consiguen una eficiencia mucho mayor. ¿Se le ocurre a usted una explicación para esto?
13. Un automóvil se mueve a lo largo de una carretera. El conductor frena bruscamente y el automóvil patina hasta detenerse. ¿En qué forma aparece la energía cinética perdida por el automóvil?
14. En la pregunta anterior, supóngase que el conductor opera sobre los frenos de modo tal que no hay ni patinaje ni deslizamiento. En este caso, ¿en qué forma aparece la energía cinética perdida por el automóvil?
15. Un automóvil acelera desde el reposo hasta una velocidad v , en condiciones tales que no ocurre ningún deslizamiento en las ruedas. ¿De dónde proviene la energía mecánica del automóvil? En particular, ¿proviene acaso de la fuerza de fricción (estática) ejercida por la carretera en el automóvil?
16. En el caso de un trabajo efectuado contra la fricción, el cambio en la energía interna es independiente de la velocidad (o del marco de referencia inercial) del observador. Esto es, observadores diferentes asignarían la misma cantidad de energía mecánica transformada en energía interna debida a la fricción. ¿Cómo puede explicarse esto, considerando que tales observadores miden cantidades diferentes de trabajo total efectuado y cambios diferentes de la energía cinética en general?
17. Dé ejemplos físicos del equilibrio inestable, del equilibrio neutral, y del equilibrio estable.
18. En el artículo "Energy and the Automobile", que apareció en la edición de octubre de 1980 de *The Physics Teacher* (pág. 494), el autor (Gener Waring) afirma: "Es interesante observar que *toda* la energía de entrada del combustible finalmente se transforma en energía térmica y se esparce a lo largo del trayecto del automóvil". Analice los diversos mecanismos por los que esto podría suceder. Considérese, por ejemplo, la fricción de la carretera, la resistencia del aire, el frenado, la radio del automóvil, los faros, la batería, las pérdidas internas del motor y del tren de transmisión, el cláxon, y así sucesivamente. Supóngase una carretera recta y nivelada.
19. Reconozca en el Sol tantas fuentes de energía como pueda. ¿Se le ocurre alguna que no pueda derivarse del Sol?
20. Explique, usando ideas de trabajo y de energía, cómo puede un niño impulsar el columpio al máximo partiendo del reposo. (Véase "How to Make a Swing Go", por R. V. Hesheth, *Physics Education*, julio de 1975, pág. 367.)
21. Dos discos están unidos por un resorte rígido. ¿Puede usted oprimir el disco superior lo suficiente para que, cuando sea soltado, mediante el resorte levante al disco inferior separándolo de la superficie de la mesa? (véase la Fig. 22). ¿Puede conservarse la energía mecánica en tal caso?
22. Explique los términos "conservación de la energía" como se usan (a) en este capítulo y (b) en conexión con una "crisis de energía" (por ejemplo, apagando las luces). ¿Cómo difieren estos dos usos?
23. La potencia eléctrica de una pequeña población es proporcionada por una planta hidroeléctrica instalada en un río cercano. Si usted apaga un foco en este sistema de energía cerrado, la conservación de la energía requiere que una cantidad igual de energía, quizás en otra forma, aparezca



Figura 22 Pregunta 21.

- en alguna otra parte del sistema. ¿Dónde y en qué forma aparecería esta energía?
- Se comprime un resorte atando sus extremos firmemente entre sí. Luego se sumerge en ácido y se disuelve. ¿Qué le sucede a la energía potencial almacenada?
 - La expresión $E_0 = mc^2$ nos dice que objetos perfectamente ordinarios como una moneda o un guijarro contienen

una cantidad enorme de energía. ¿Por qué estos grandes almacenamientos de energía pasaron inadvertidos tanto tiempo?

- “Las explosiones nucleares (peso por peso) liberan alrededor de un millón de veces más energía que las explosiones químicas, porque las explosiones nucleares están basadas en la relación de Einstein $E_0 = mc^2$. ¿Qué piensa usted de esta afirmación?
- ¿Cómo pueden ser “equivalentes” la masa y la energía en vista del hecho de que son cantidades físicas totalmente diferentes, definidas de modo diferente y medidas en unidades diferentes?
- Una esfera metálica caliente se enfría cuando está sobre la plataforma de una báscula. Si la báscula es lo suficientemente sensible, ¿indicaría ello un cambio de masa?
- Existen cantidades cuantizadas en física clásica (es decir, en la física no cuántica)? De ser así, dé ejemplos.

PROBLEMAS

Sección 8-3 Sistemas conservativos unidimensionales

- Para inhabilitar proyectiles balísticos durante la fase de vuelo del primer encendido se ha desarrollado una “torreta electromagnética” para ser transportada por satélites terrestres de órbita baja. La torreta podría disparar un proyectil maniobrable de 2.38 kg a 10.0 km/s. La energía cinética transportada por el proyectil es suficiente para, con su impacto, inhabilitar un proyectil guiado aunque no lleve explosivos. (Un arma de esta clase es un arma de “energía cinética”.) El proyectil es acelerado al instante del disparo por fuerzas electromagnéticas. Supóngase que, en su lugar, deseamos disparar el proyectil usando un resorte (un arma de “resorte”). ¿Cuál debe ser la constante de fuerza con objeto de alcanzar la velocidad deseada después de comprimir el resorte 1.47 m?
- Se dice que pueden llegar a evaporarse hasta 900 kg de agua diarios de los árboles grandes. La evaporación tiene lugar en las hojas. Para llegar a ellas el agua debe subir desde las raíces del árbol. (a) Suponiendo que la elevación de agua desde la tierra sea de 9.20 m en promedio, ¿cuánta energía debe ser proporcionada? (b) ¿Cuál es la potencia promedio si tenemos en cuenta que la evaporación ocurre durante 12 h del día?
- La cima del monte Everest está a 8850 m sobre el nivel del mar. (a) ¿Cuánta energía gastará un alpinista de 90 kg contra la gravedad al escalar hasta la cima desde el nivel del mar? (b) ¿Cuántos bars en Marte, a razón de 300 kcal por bar, abastecería una energía equivalente a ésta? Su respuesta debe sugerir que el trabajo efectuado contra la gravedad es una pequeñísima parte de la energía gastada al escalar una montaña.

- Una persona de 220 lb salta desde una ventana hasta una red elástica como las usadas por los bomberos situada a 36 ft abajo. La red se estira 4.4 ft antes de llevar a la persona al reposo y lanzarla de nuevo al aire. ¿Cuál es la energía potencial de la red estirada si las fuerzas no conservativas no disipan energía alguna?
- Un cubo de hielo muy pequeño cae desprendido desde el borde de una cubeta semiesférica sin fricción cuyo radio es de 23.6 cm; véase la figura 23. ¿A qué velocidad se mueve el cubo en el fondo de la cubeta?

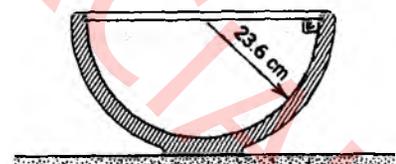


Figura 23 Problema 5.

- Un flujo de cenizas volcánicas se mueve a través de un terreno horizontal y encuentra una pendiente de 10° hacia arriba. Se observa que avanza 920 m por la pendiente antes de llegar al reposo. Las cenizas volcánicas contienen gases atrapados, de modo que la fuerza de fricción con el terreno es muy pequeña y puede despreciarse. ¿A qué velocidad se movían las cenizas en el momento antes de llegar a la pendiente?
- Un proyectil con una masa de 2.40 kg se dispara desde un acantilado de 125 m de altura a una velocidad inicial de

150 m/s, dirigido a 41.0° sobre la horizontal. ¿Cuáles son (a) la energía cinética del proyectil en el instante inmediato después de ser disparado y (b) la energía potencial? (c) Halle la velocidad del proyectil en el momento antes de que llegue al suelo. ¿Cuáles respuestas dependen de la masa del proyectil? Desprecie el arrastre del aire.

8. Una bola de masa m está unida al extremo de una varilla muy ligera de longitud L . El otro extremo de la varilla está pivotado de modo que la bola pueda moverse en círculo vertical. La varilla se lleva a la posición horizontal, como se muestra en la figura 24, y se empuja hacia abajo, de modo que la varilla oscile y alcance la posición vertical hacia arriba. ¿Qué velocidad inicial se le impartió a la bola?

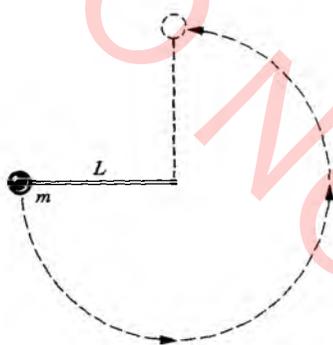


Figura 24 Problemas 8 y 38.

9. Una bola de 112 g es arrojada desde una ventana a una velocidad inicial de 8.16 m/s y un ángulo de 34.0° sobre la horizontal. Usando la conservación de la energía, determine (a) la energía cinética de la bola en la parte más alta de su vuelo y (b) su velocidad cuando está a 2.87 m debajo de la ventana. Desprecie la fuerza de arrastre del aire.
10. El carrito (sin fricción) de una montaña rusa parte del punto A en la figura 25 a la velocidad v_0 . ¿Cuál será la velocidad del carrito (a) en el punto B, (b) en el punto C, y (c) en el punto D? Supóngase que el carrito puede ser considerado como una partícula y que siempre permanece sobre la vía.

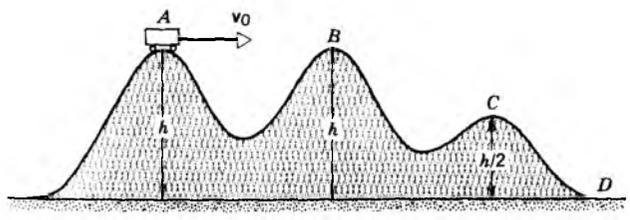


Figura 25 Problema 10.

11. Un camión que ha perdido los frenos desciende por una pendiente a 80 mi/h. Por fortuna, existe una rampa de escape de emergencia al pie de la colina. La inclinación de la rampa es de 15° ; véase la figura 26. ¿Cuál deberá ser

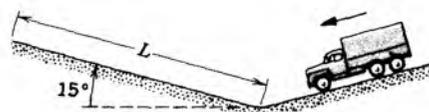


Figura 26 Problema 11.

la longitud mínima L para que el camión llegue al reposo, al menos momentáneamente?

12. La figura 27 muestra la fuerza en newtons en función del estiramiento o de la compresión en centímetros del resorte de un rifle de corchos. El resorte se comprime en 5.50 cm y se usa para impulsar un corcho de 3.80 g de masa. (a) ¿Cuál es la velocidad del corcho si es lanzado cuando el resorte pasa por su posición de relajamiento? (b) Supóngase ahora que el corcho se pega al resorte provocando que el resorte se extienda 1.50 cm más de su longitud cuando está relajado, antes de que ocurra la separación. ¿Cuál es la velocidad del corcho en este caso al momento de ser lanzado?

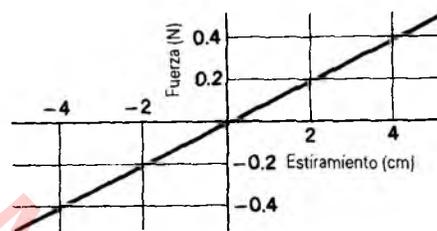


Figura 27 Problema 12.

13. Una varilla delgada de longitud $L = 2.13$ m y de masa despreciable, está pivotada en un extremo de modo que pueda girar en círculo vertical. La varilla se separa en un ángulo $\theta = 35.0^\circ$ y luego se suelta, como se muestra en la figura 28. ¿A qué velocidad se mueve la bola de plomo que está en el extremo de la varilla en su punto más bajo?

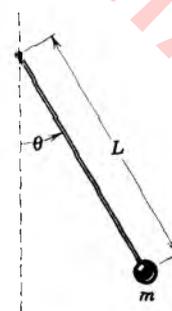


Figura 28 Problema 13.

14. La figura 29 muestra una piedra de 7.94 kg que descansa sobre un resorte. El resorte se comprime 10.2 cm por la

piedra. (a) Calcule la constante de fuerza del resorte. (b) La piedra es empujada hacia abajo 28.6 cm más y luego se suelta. ¿Cuánta energía potencial hay almacenada en el resorte en el momento antes de que sea soltada la piedra? (cx) ¿A qué altura se elevará la piedra sobre esta nueva posición (la más baja)?

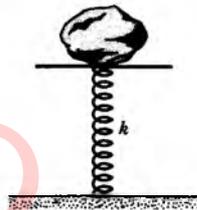


Figura 29 Problema 14.

15. Por las cataratas del Niágara caen aproximadamente cada minuto $3.3 \times 10^5 \text{ m}^3$ de agua por minuto, desde una altura de 50 m. (a) ¿Cuál sería la salida de potencia de una planta generadora de electricidad que pudiera convertir el 48% de la energía potencial del agua en energía eléctrica? (b) Si la compañía de luz vendiera esta energía a una tasa industrial de 1.2 cent/kW · h, ¿cuál sería su ingreso anual por esta fuente? Un metro cúbico (1 m^3) de agua tiene una masa de 1000 kg.
16. El área continental de los Estados Unidos es de alrededor de $8 \times 10^6 \text{ km}^2$, y la elevación promedio de la superficie de su terreno es de unos 500 m. El promedio de caída pluvial es de 75 cm. Dos tercios de esa cantidad de lluvia retorna a la atmósfera por evaporación, pero el resto va a parar al océano. Si pudiera emplearse toda esta agua para generar electricidad en plantas hidroeléctricas de potencia, ¿qué promedio de potencia de salida podría producirse?
17. Un objeto cae desde una altura h , donde estaba en reposo. Determine la energía cinética y la energía potencial del objeto en función (a) del tiempo, y (b) de la altura. Trace una gráfica de las expresiones y demuestre que su suma (la energía total) es constante en cada caso.
18. En los Juegos Olímpicos de 1984, la deportista de Alemania Occidental Ulrike Meyfarth impulsó un record olímpico en salto de altura para mujeres con un salto de 2.02 m; véase la Fig. 30. En igualdad de circunstancias, ¿a qué altura podría haber saltado en la Luna, donde la gravedad en su superficie es tan sólo de 1.67 m/s^2 ? (Sugerencia: La altura que "cuenta" es la distancia vertical a la que su centro de gravedad se elevó después de que sus pies abandonaron el suelo. Supóngase que, en el instante en que sus pies perdieron contacto, su centro de gravedad estaba a 110 cm sobre el suelo. Supóngase también que, cuando pasa sobre la barra, su centro de gravedad está a la misma altura que la barra.)
19. Un bloque de 1.93 se coloca contra un resorte comprimido sobre un plano inclinado de 27.0° sin fricción (véase la Fig. 31). El resorte, cuya constante de fuerza es de 20.8 N/cm, se comprime 18.7 cm, después de lo cual el bloque se suelta. ¿Qué tanto subirá el bloque antes de alcanzar el



Figura 30 Problema 18.

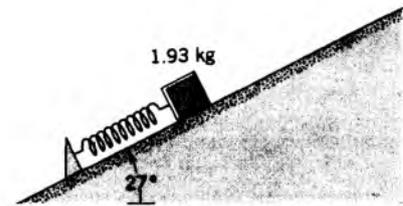


Figura 31. Problema 19.

reposo? Mídase la posición final del bloque con respecto a su posición precisamente antes de ser soltado.

20. Un resorte ideal sin masa puede comprimirse 2.33 cm por una fuerza de 268 N. Un bloque de masa $m = 3.18 \text{ kg}$ es lanzado a partir del reposo desde lo alto de un plano inclinado como se muestra en la figura 32, siendo 32.0° la inclinación del plano. El bloque llega momentáneamente al reposo después de haber comprimido al resorte 5.48 cm (a) ¿Cuánto se movió el bloque hacia abajo del plano en ese momento? (b) ¿Cuál era la velocidad del bloque en el momento en que toca el resorte?

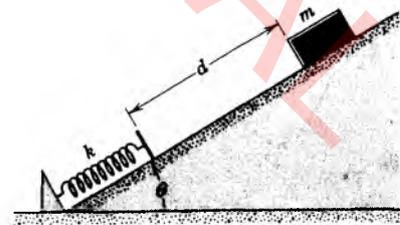


Figura 32 Problemas 20 y 35.

21. El resorte de un rifle de resorte tiene una constante de fuerza de 4.15 lb/in. Cuando el rifle está inclinado a un ángulo de 36.0° , una bola de 2.80 oz es lanzada a una altura de 6.33 ft sobre la boca del cañón. (a) ¿Cuál era la

velocidad inicial de la bola? (b) ¿Cuánto debe el resorte haberse comprimido inicialmente?

22. Se hace un péndulo atando una piedra de 1.33 kg a un cordón de 3.82 m de longitud. La piedra se lanza perpendicularmente al cordón, separándose del suelo y formando el cordón un ángulo de 58.0° con la vertical. Se observa que, cuando pasa por su punto más bajo, (a) ¿Cuál era la velocidad de la piedra al proyectarla? (b) ¿Cuál es el ángulo más grande con la vertical que puede alcanzar el cordón durante el movimiento de la piedra? (c) Usando el punto más bajo de la oscilación como el cero de la energía potencial gravitatoria, calcule la energía mecánica total del sistema.
23. Se sujeta una cadena sobre una mesa sin fricción desde la que cuelga un cuarto de su longitud como se muestra en la figura 33. Si la cadena tiene una longitud L y una masa m , ¿cuánto trabajo se requiere para jalar la parte que cuelga hasta que quede totalmente sobre la mesa?

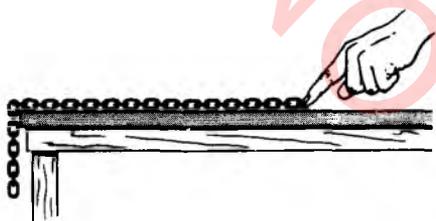


Figura 33 Problema 23.

24. El extremo de un resorte vertical se fija al techo. Se coloca una pesa en el otro extremo y se baja lentamente hasta su posición de equilibrio. Demuestre que la pérdida de la energía potencial gravitatoria de la pesa es igual a la mitad de la ganancia de energía potencial del resorte. (¿Por qué estas dos cantidades no son iguales?)
25. Un bloque de 2.14 kg se deja caer desde una altura de 43.6 cm contra un resorte de constante de fuerza $k = 18.6$ N/cm, como se muestra en la figura 34. Halle la distancia máxima de compresión del resorte.

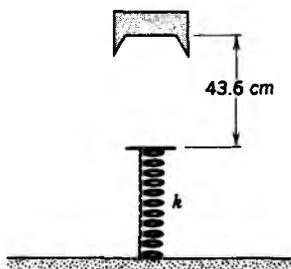


Figura 34 Problema 25.

26. Dos niños están jugando a tratar de golpear una pequeña caja que está en el suelo con una canica que disparan con un rifle de resorte montado sobre una mesa. La caja blanco está a 2.20 m de distancia horizontal desde el borde de la

mesa; véase la figura 35. Robertito comprime el resorte 1.10 cm, pero a la canica le faltan 27.0 cm para dar en el blanco. ¿Qué tanto tendrá que comprimir Juanito el resorte para darle al blanco?

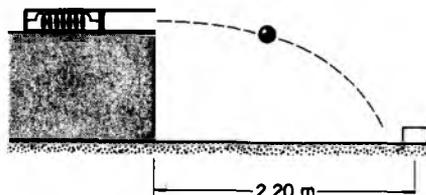


Figura 35 Problema 26.

27. Un pequeño bloque de masa m se desliza sin fricción a lo largo de una pista en rizo como se muestra en la figura 36. (a) El bloque se suelta desde el reposo en el punto P . ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre él en el punto Q ? (b) ¿Desde qué altura sobre el fondo del rizo debería soltarse el bloque de modo que llegue a punto de perder el contacto con la pista en la parte superior del rizo?

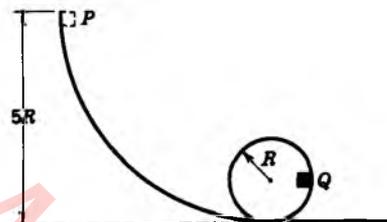


Figura 36 Problema 27.

28. Tarzán, que pesa 180 lb, se lanza desde un risco, colgado del extremo de una liana; véase la figura 37. Desde lo alto del risco hasta el punto a donde él quiere llegar hay una distancia de 8.5 ft. La liana tiene una resistencia a la rotura de 250 lb. ¿Se romperá la liana?
29. La magnitud de la fuerza de atracción gravitatoria entre una partícula de masa m_1 y otra de masa m_2 está dada por

$$F(x) = G \frac{m_1 m_2}{x^2},$$

donde G es una constante y x es la distancia entre las partículas. (a) ¿Cuál es la función $U(x)$ de la energía potencial? Supóngase que $U(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. (b) ¿Cuánto trabajo se requiere para aumentar la separación de las partículas desde $x = x_1$ hasta $x = x_1 + d$?

30. Sobre un objeto de 1.18 kg actúa una fuerza neta conservativa dada exactamente por $F = -3x - 5x^2$, donde F está en newtons si x está en metros. (a) Halle la energía potencial del objeto en $x = 2.26$ m. Suponga que $U(0) = 0$. (b) El objeto tiene una velocidad de 4.13 m/s en la dirección x negativa cuando está en $x = 4.91$ m. Halle la velocidad cuando pasa por $x = 1.77$ m.

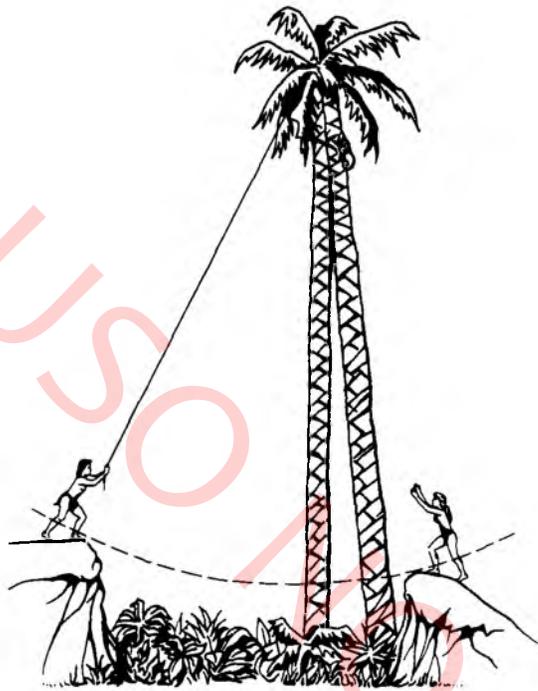


Figura 37 Problema 28.

31. Se halla que cierto resorte *no* se ajusta a la ley de Hooke. La fuerza (en newtons) que ejerce cuando es estirado una distancia x (en metros) tiene la magnitud de $52.8x + 38.4x^2$ en dirección opuesta al alargamiento. (a) Calcule el trabajo necesario para alargar el resorte desde $x = 0.522$ m hasta $x = 1.34$ m. (b) Con un extremo del resorte fijo, una partícula de 2.17 kg de masa se amarra al otro extremo del resorte cuando se estira una cantidad de $x = 1.34$ m. Si la partícula se suelta entonces desde el reposo, calcule su velocidad en el instante en que el resorte ha regresado a la configuración en la que su extensión es de $x = 0.522$ m. (c) ¿Es la fuerza ejercida por el resorte conservativa o es no conservativa? Explique.
32. El cordón de la figura 38 tiene una longitud $L = 120$ cm, y la distancia d a la clavija fija P es de 75.0 cm. Cuando la bola se suelta desde el reposo en la posición mostrada, oscilará recorriendo el arco punteado. ¿A qué velocidad irá (a) cuando llegue al punto más bajo de su oscilación y (b) cuando llegue al punto más alto, una vez que el cordón haya topado con la clavija?
33. En la figura 38 demuestre que, si la pesa del péndulo ha de oscilar completamente alrededor de la clavija fija, entonces $d > 3L/5$. (Sugerencia: La pesa debe moverse en la parte superior de su oscilación; de otro modo, el cordón se vendrá abajo.)
34. Un bloque de masa m sujeto al extremo de un cordón está enrollado alrededor de un círculo vertical de radio R . Halle la velocidad crítica por debajo de la cual el cordón se aflojará en el punto más elevado.
35. Un bloque de 3.22 kg comienza desde el reposo y se desliza una distancia d hacia abajo por un plano inclinado a 28.0° sin fricción en donde choca contra un resorte de

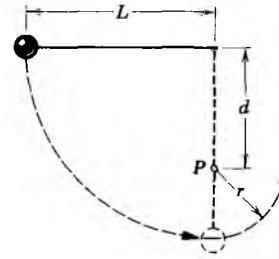


Figura 38 Problemas 32 y 33.

masa despreciable; véase la figura 32. El bloque se desliza otros 21.4 cm más antes de llegar al reposo momentáneamente comprimiendo el resorte, cuya constante de fuerza es de 427 N/m. (a) ¿Cuál es el valor de d ? (b) La velocidad del bloque continúa creciendo durante un cierto intervalo después de que el bloque ha hecho contacto con el resorte. ¿A qué distancia adicional se deslizará el bloque antes de que alcance su velocidad máxima y empiece a disminuir su velocidad?

36. Un joven está sentado en la parte superior de un montículo de hielo (Fig. 39). Se da a sí mismo un pequeño impulso y comienza a deslizarse hacia abajo. Demuestre que abandona el hielo en el punto cuya altura es de $2R/3$ si el hielo carece de fricción. (Sugerencia: La fuerza normal se anula cuando el joven abandona el hielo.)



Figura 39 Problema 36.

37. La partícula m de la figura 40 se mueve en un círculo vertical de radio R dentro de una pista. No hay fricción. Cuando m está en el punto más bajo, su velocidad es v_0 . (a) ¿Cuál es el valor mínimo v_m de v_0 para el cual m girará por completo alrededor del círculo sin perder contacto con la pista? (b) Supóngase que v_0 sea de $0.775 v_m$. La partícula se moverá por la pista subiendo hasta un punto P en el cual perderá el contacto con la pista y viajará a lo largo de una trayectoria representada aproximadamente por la línea punteada. Halle la posición angular θ del punto P .
38. Supóngase que la varilla de la figura 24 es reemplazada por un cordón muy elástico, hecho de hule, por ejemplo, y que el cordón no está estirado cuando tiene la longitud L en el momento en que es soltada la bola. (a) Explique por qué usted esperaría que la bola alcanzase un punto situado a una distancia L mayor por debajo del punto de suspensión. (b) Demuestre, usando las consideraciones dinámicas y de energía, que si ΔL es pequeña en comparación con L , el cordón se estirará una cantidad $\Delta L = 3mg/k$, donde k se supone que es la constante de fuerza del cordón. Nótese que cuanto más grande sea k , más pequeña será ΔL , y que la aproximación es mejor cuando $\Delta L \ll L$. (c) Demuestre,

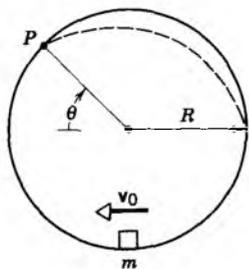


Figura 40 Problema 37.

en estas circunstancias, que la velocidad de la bola en la parte inferior es $v = \sqrt{2g(L - 3mg/2k)}$, menor de lo que sería con un cordón inelástico ($k = \infty$). Dé una explicación física de este resultado usando consideraciones de energía.

Sección 8-4 Sistemas conservativos unidimensionales: la solución completa

39. Una partícula se mueve a lo largo del eje x a través de una región en la que su energía potencial $U(x)$ varía como en la figura 41. (a) Haga una gráfica cuantitativa de la fuerza $F(x)$ que actúa sobre la partícula, usando la misma escala del eje x que en la figura 41. (b) La partícula tiene una energía mecánica (constante) E de 4.0 J. Trace una gráfica de su energía cinética $K(x)$ directamente en la figura 41.

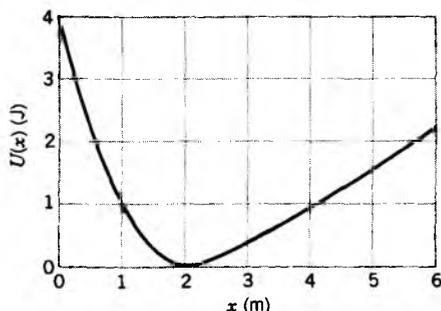


Figura 41 Problema 39

40. Una partícula de 2.0 kg de masa se mueve a lo largo del eje x a través de una región en la que su energía potencial $U(x)$ varía como se muestra en la figura 42. Cuando la partícula está en $x = 2.0$ m, su velocidad es de -2.0 m/s. (a) Calcule la fuerza que actúa sobre la partícula en esta posición. (b) Entre qué límites tiene lugar el movimiento? (c) ¿A qué velocidad se mueve cuando está en $x = 7.0$ m?
41. La figura 43a muestra un átomo de masa m a una distancia r desde un átomo en reposo de masa M , donde $m \ll M$. La figura 43b muestra la función $U(r)$ de la energía potencial para varias posiciones del átomo más ligero. Describa el movimiento de este átomo si (a) la energía mecánica total es mayor que cero, como en E_1 , y (b) si es menor que cero, como en E_2 . Para $E_1 = 1.0 \times 10^{-19}$ J y $r = 0.30$ nm, halle (c) la energía potencial, (d) la energía ciné-

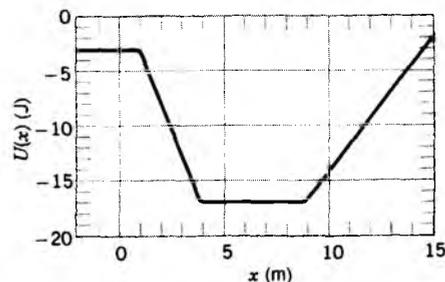


Figura 42 Problema 40.

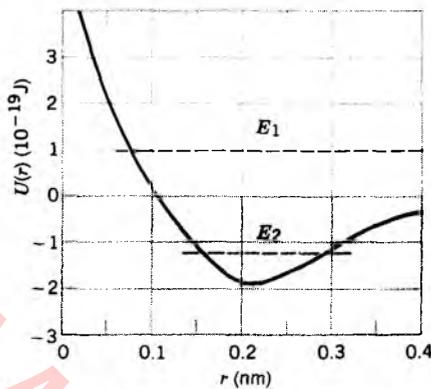
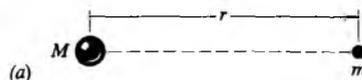


Figura 43 Problema 41.

tica, y (e) la fuerza (magnitud y dirección) que actúa sobre el átomo en movimiento.

42. Una partícula alfa (núcleo de helio) dentro de un núcleo grande está enlazada por una energía potencial como la que se muestra en la figura 44. (a) Construya una función de x , que tiene esta forma general, con un valor mínimo U_0 en $x = 0$ y un valor máximo U_1 en $x = x_1$ y $x = -x_1$. (b) Determine la fuerza entre la partícula alfa y el núcleo en función de x . (c) Describa los movimientos posibles.

Sección 8-5 Sistemas conservativos bi y tridimensionales

43. Demuestre que para la misma velocidad inicial v_0 , la velocidad v de un proyectil será la misma en todos los puntos que estén a la misma altura, sin importar el ángulo de proyección. Ignore la resistencia del aire.
44. La energía potencial que corresponde a una cierta fuerza bidimensional está dada por $U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$. (a) Derive F_x y F_y y describa el vector fuerza en cada punto en función de sus coordenadas x y y . (b) Derive F_r y F_θ y describa el vector fuerza en cada punto en función de las coordenadas polares r y θ del punto. (c) ¿Puede usted pensar en un modelo físico de una fuerza tal?

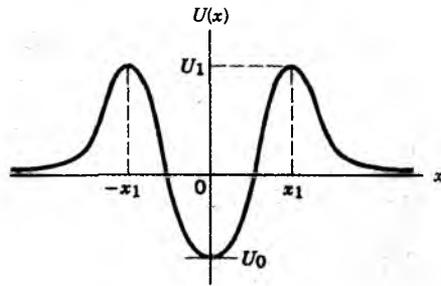


Figura 44 Problema 42.

45. La llamada energía potencial de Yukawa

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0}$$

da una descripción bastante precisa de la interacción entre nucleones (es decir, neutrones y protones, los constituyentes del núcleo). La constante r_0 es alrededor de 1.5×10^{-15} m y la constante U_0 es de alrededor de 50 MeV. (a) Halle la expresión correspondiente para la fuerza de atracción. (b) Para mostrar el corto alcance de esta fuerza, calcule la relación de la fuerza en $r = 2r_0$, $4r_0$, y $10r_0$ con la fuerza en $r = r_0$.

46. Integrando a lo largo de los mismos tres pasos del problema muestra 5, pruebe que la fuerza $\mathbf{F} = -k_1 y \mathbf{i} - k_2 x \mathbf{j}$ es no conservativa cuando $k_1 \neq k_2$.

Sección 8-6 Conservación de la energía en un sistema de partículas

47. Un oso de 25.3 kg se desliza, desde el reposo, 12.2 m por el tronco de un pino, moviéndose a una velocidad de 5.56 m/s al llegar al fondo. (a) ¿Cuál es la energía potencial inicial del oso? (b) Halle la energía cinética del oso al llegar al fondo. (c) ¿Cuál es el cambio en la energía mecánica del oso, asociada con la acción de las fuerzas de fricción?
48. Cuando un taxi espacial (de 79,000 kg de masa) regresa a la Tierra desde una órbita, entra en la atmósfera a una velocidad de 18,000 mi/h, la cual se reduce gradualmente hasta la velocidad de aterrizaje de 190 nudos (= 220 mi/h). ¿Cuál es su energía cinética (a) al entrar a la atmósfera y (b) en el aterrizaje? Véase la figura 45. (c) ¿Qué le sucede a la energía "faltante"?
49. Un paracaidista de 68 kg cae a una velocidad terminal constante de 59 m/s. ¿A qué razón aumenta la energía interna del paracaidista y del aire que le rodea?
50. Un río desciende 15 m al pasar por unos rápidos. La velocidad del agua es de 3.2 m/s al entrar en los rápidos y 13 m/s cuando sale. ¿Qué porcentaje de la energía potencial perdida por el agua al atravesar los rápidos aparece como energía cinética del agua corriente abajo? ¿Qué le sucede al resto de la energía?
51. Durante un deslizamiento de rocas, una roca de 524 kg se cae desde el reposo por la ladera de una colina que tiene 488 m de longitud y 292 m de altura. La velocidad de la roca cuando llega al pie de la colina es de 62.6 m/s.

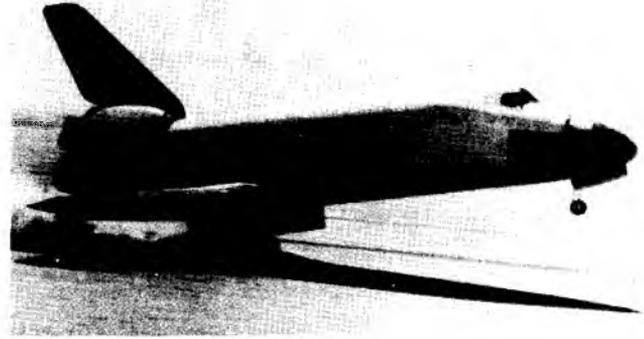


Figura 45 Problema 48.

¿Cuánta energía mecánica pierde la roca durante el deslizamiento debido a la fricción?

52. Un proyectil cuya masa es de 9.4 kg se dispara verticalmente hacia arriba. En su vuelo, se disipan 68 kJ de energía mecánica a causa del arrastre del aire. ¿Qué tanto más alto habría llegado si el arrastre del aire fuese despreciable (por ejemplo, haciendo aerodinámico al proyectil)?
53. Un bloque de 4.26 kg arranca hacia arriba en una pendiente a 33.0° a 7.81 m/s. ¿A qué distancia se deslizará si pierde 34.6 J de energía mecánica debido a la fricción?
54. Una piedra de peso w es arrojada verticalmente hacia arriba en el aire a una velocidad inicial v_0 . Supóngase que la fuerza de arrastre f disipa una cantidad fy de energía mecánica cuando la piedra recorre una distancia y . (a) Demuestre que la altura máxima alcanzada por la piedra es

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$

(b) Demuestre que la velocidad de la piedra al momento del impacto con el suelo es

$$v = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f} \right)^{1/2}$$

55. Un bloque de 1.34 kg que se desliza sobre una superficie horizontal choca con un resorte de 1.93 N/cm de constante de fuerza. El bloque comprime al resorte 4.16 cm desde la posición de relajamiento. La fricción entre el bloque y la superficie disipa 117 mJ de energía mecánica cuando el bloque es llevado al reposo. Halle la velocidad del bloque en el instante del choque con el resorte.
56. Un objeto pequeño de masa $m = 234$ g se desliza por un carril con extremos elevados y una parte central plana, como se muestra en la figura 46. La parte plana tiene una longitud $L = 2.16$ m. Las porciones curvas del carril carecen de fricción. Al atravesar la parte plana, el objeto pierde 688 mJ de energía mecánica, debido a la fricción. El objeto es soltado en el punto A, que tiene una altura $h = 1.05$ m sobre la parte plana del carril. ¿Dónde llega el objeto finalmente al reposo?
57. Dos picos nevados tienen elevaciones de 862 m y 741 m sobre el valle que hay entre ellos. Una pista de esquiar se

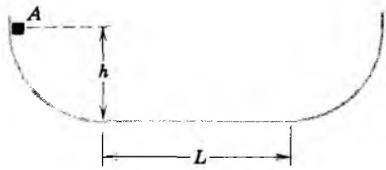


Figura 46 Problema 56.

extiende desde la cima del pico más elevado hasta la cima del más bajo; véase la figura 47. (a) Un esquiador arranca desde el reposo en el pico más elevado. ¿A qué velocidad llegará al pico más bajo si empieza el descenso sin usar los bastones? Suponga circunstancias de hielo, de modo que no exista fricción. (b) Después de una nevada, una esquiadora de 54.4 kg hace el mismo trayecto también sin usar los bastones, pero esto solo lo hace cuando sube el pico más bajo. ¿En cuánto aumenta la energía interna de sus esquis y de la nieve sobre la que avanza?

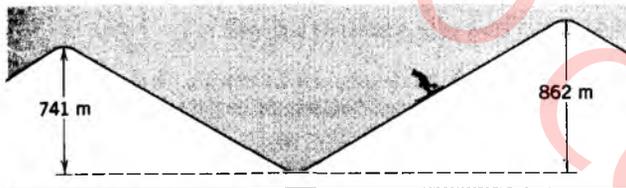


Figura 47 Problema 57.

58. La magnitud de la fuerza de atracción entre el protón cargado positivamente y el electrón cargado negativamente del átomo de hidrógeno está dada por

$$F = k \frac{e^2}{r^2},$$

donde e es la carga del electrón, k es una constante, y r es la separación entre el electrón y el protón. Supóngase que el protón está fijo. Imagínese que el electrón se mueve inicialmente en un círculo de radio r_1 con respecto al protón y que súbitamente salta a una órbita circular de radio menor r_2 ; véase la figura 48. (a) Calcule el cambio de energía cinética del electrón, usando la segunda ley de Newton. (b) Usando la relación entre la fuerza y la energía potencial, calcule el cambio de energía potencial del átomo. (c) ¿En cuánto ha cambiado la energía total del átomo en este proceso? (Esta energía se da a menudo en forma de radiación.)

59. El cable del elevador de 4000 lb que se muestra en la figura 49 se revienta cuando el elevador está en reposo en el primer piso estando el fondo a una distancia $d = 12.0$ ft sobre un resorte amortiguador cuya constante de fuerza es $k = 10,000$ lb/ft. Un dispositivo de seguridad abraza los rieles de guía extrayendo 1000 ft · lb de energía mecánica por cada 1.00 ft que se mueve el elevador. (a) Halle la velocidad del elevador justo antes de que choque contra el resorte. (b) Halle la distancia en que se comprime el

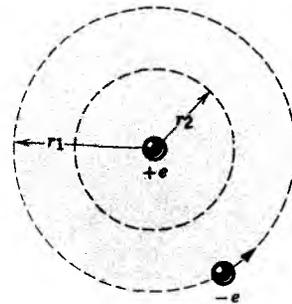


Figura 48 Problema 58.

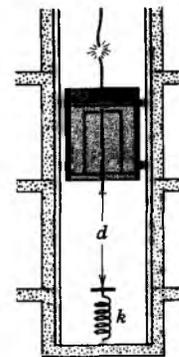


Figura 49 Problema 59.

- resorte. (c) Halle la distancia en que el elevador rebotará dentro del tiro. (d) Calcule aproximadamente la distancia total que recorrerá el elevador antes de llegar al reposo. ¿Por qué no es exacta esta respuesta?
60. Cuando un automóvil de 1700 kg se mueve a una velocidad constante de 15 m/s, el motor proporciona 16 kW de potencia para vencer la fricción, la resistencia del viento, etc. (a) ¿Cuál es la fuerza retardante efectiva asociada con todas las fuerzas de fricción combinadas? (b) ¿Qué potencia debe proporcionar el motor si el automóvil va a subir una pendiente del 8.0% (8.0 m verticalmente por cada 100 m horizontalmente) a razón de 15 m/s? (c) ¿Qué pendiente, expresada en porcentaje, bajaría el automóvil a 15 m/s?

Sección 8-7 Masa y energía

61. (a) ¿Cuánta energía en joules es equivalente a una masa de 120 g? (b) ¿Durante cuántos años proporcionaría ésta las necesidades de energía de un hogar unifamiliar que consuma energía a razón de 1.30 kW en promedio?
62. La magnitud M de un terremoto en la escala de Richter se relaciona con la energía liberada E en joules según la ecuación

$$\log E = 1.44M + 5.24.$$

(a) El terremoto de 1989 en el área de San Francisco (véase la Fig. 50) fue de una magnitud de 7.1. ¿Cuánta energía



Figura 50 Problema 62.

- fue liberada? (b) ¿Cuál fue la reducción de masa equivalente a esta liberación de energía?
63. Una planta nuclear de potencia situada en Oregon abastece 1030 MW de potencia útil uniformemente durante un año. Además, se descargan 2100 MW de potencia en forma de energía térmica al río Columbia. Calcule el cambio de masa del combustible nuclear después de 1 año de operación.
 64. Los Estados Unidos de Norteamérica generaron alrededor de 2.31×10^{12} kW · h de energía eléctrica en 1983. Supóngase que la energía se produjo en plantas nucleares. Halle la reducción de masa del combustible que acompañaría a la producción de esta cantidad de energía.
 65. Una tableta de aspirina tiene una masa de 320 mg. ¿Durante cuántas millas abastecería de potencia a un automóvil la energía equivalente a esta masa, en forma de gasolina? Supóngase un consumo de 30.0 mi/gal y un calor de combustión de la gasolina de 130 MJ/gal. Exprese su respuesta en términos de la circunferencia ecuatorial de la Tierra.
 66. Una nave espacial está propulsada por la aniquilación de materia-antimateria. ¿Cuánta materia y antimateria debe aniquilarse para acelerar a una nave espacial de 1820 ton desde el reposo hasta un décimo de la velocidad de la luz? Use la fórmula no relativista de la energía cinética.
 67. El Sol irradia energía a razón de 4×10^{26} W. ¿Cuántas “toneladas de luz solar” intercepta la Tierra en 1 día?
 68. La *energía de amarre* del núcleo de un átomo es la diferencia entre el total de las energías de reposo de sus protones y neutrones constituyentes y la energía de reposo del propio núcleo. El núcleo de un átomo de oro contiene 79 protones y 118 neutrones y tiene una masa de 196.9232 u. Calcule la energía de amarre del núcleo. (Un protón tiene una masa de 1.00728 u, un neutrón una masa de 1.00867 u; la energía de reposo de una unidad de masa atómica es de 931.5 MeV.)

Sección 8-8 Cuantización de la energía

69. ¿En cuánto debe de cambiar la energía de un átomo para que emita luz de una frecuencia de 5.34×10^{14} s⁻¹?
70. (a) Un átomo de hidrógeno tiene una energía de -3.4 eV. Si su energía cambia a -13.6 eV, ¿cuál es la frecuencia de la luz? (b) La luz es emitida o absorbida?

Proyectos para la computadora

71. Supongamos que la fuerza que actúa sobre una partícula esté dada por $\mathbf{F} = 8xy^2\mathbf{i} + 12x^2y\mathbf{j}$. Esta fuerza es conservativa y la función de la energía potencial asociada a ella es, $U = -4x^2y^3$. Usted puede usar esta función para demostrar alguna de las propiedades más importantes de una fuerza conservativa. Primero, la energía potencial de la partícula depende solamente de sus coordenadas. En una hoja de papel para gráficas trace un sistema de coordenadas, yendo x y y de -5 m a +5 m en cada una. Use ahora un programa de computadora o una hoja de cálculo para generar valores de la energía potencial para todos los valores enteros de x y y (en metros) entre estos límites y escriba los valores en los lugares apropiados de su gráfica. Use la gráfica para responder a las siguientes preguntas: (a) ¿Qué trabajo efectúa la fuerza cuando la partícula se mueve desde $x = -5$ m, $y = -5$ m hasta el origen? (b) ¿Qué trabajo lleva a cabo la fuerza cuando la partícula se mueve desde el origen hasta $x = +5$ m, $y = +3$ m? (c) ¿Qué trabajo efectúa la fuerza cuando la partícula se mueve desde $x = -5$ m, $y = -5$ m hasta $x = +5$ m, $y = +3$ m? Su respuesta deberá ser la suma de las respuestas a las partes (a) y (b). (d) La partícula parte del origen con una energía cinética de 900 J y llega a $x = +5$ m, $y = +2$ m. Si ésta es la única fuerza que actúa sobre ella, ¿cuál es su energía cinética cuando llega al segundo punto? (e) La partícula parte del origen con una energía cinética de 900 J y llega a $x = +5$ m, $y = -2$ m. Si esta es la única fuerza que actúa sobre ella,

¿cuál es su energía cinética cuando llega al segundo punto? (f) La partícula parte del origen con una energía cinética de 600 J y se mueve a lo largo de la línea $x = -y$ hacia $x = +5$ m, $y = -5$ m. Se necesita otra fuerza para mantenerla en la trayectoria, pero supóngase que la segunda fuerza es siempre perpendicular a la trayectoria. ¿Dónde se detiene la partícula?

72. Un robot empuja una caja de 20 kg a velocidad constante a través de un piso desde $x = 0$ hasta $x = 5.0$ m. Debido a la condición variante de la superficie del piso, el robot debe empujar con una fuerza horizontal variable para hacer que la caja se mueva a velocidad constante. Se encuentra que una buena representación de esta fuerza variable es $F(x) = 0.30mg \sqrt{xe^{-0.20x}}$, donde x está en metros y F en newtons. Evalúe el trabajo efectuado por el robot entre $x = 0$ y $x = 5$ m.

El trabajo efectuado está dado por $W = \int_0^5 F dx$. La integral no puede evaluarse analíticamente pero puede estimarse numéricamente por medio de una computadora. Divida la región de integración en N intervalos, cada uno de anchura Δx , y haga que F_i sea el valor de la fuerza en

el centro del intervalo i . Entonces $\int_0^5 F dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^N F_i$.

Cuanto más pequeña sea Δx mejor será la estimación, pero no podemos hacer que sea tan pequeña que su significado se pierda al evaluar la suma. (Podemos usar la regla de Simpson, la cual da una estimación mejor. Véase un texto de cálculo para los detalles.)

Escriba un programa de computadora o diseñe una hoja de cálculo para calcular el trabajo efectuado por

la fuerza. Usted debe poder alimentar valores de x_0 , x_f , y N . La suma puede ser manejada como un rizo. Cada vez que completemos una vuelta, se evalúa la fuerza en el centro de un intervalo y se añade a la corrida. En la primera corrida haga que $N = 20$, luego complete varias corridas más, duplicando a N cada vez. Deténgase cuando dos resultados sucesivos concuerden en 3 cifras significativas.

73. La fuerza conservativa \mathbf{F} , con componentes $F_x = y(1 - x)e^{-x}$, $F_y = xe^{-x}$, y $F_z = 0$, actúa sobre una partícula. (a) Supóngase que la partícula se mueve desde el origen a lo largo del eje x hasta $x = 2.0$ m y luego a lo largo de una línea paralela al eje y hasta $x = 2.0$ m, $y = 2.0$ m. El trabajo efectuado por la fuerza puede ser calculado analíticamente con facilidad. Hágalo. Supóngase ahora que el objeto se mueve desde el origen a lo largo del eje y hasta $y = 2.0$ m y luego a lo largo de una línea paralela al eje x hasta $x = 2.0$ m, $y = 2.0$ m. Una vez más, calcule el trabajo efectuado, pero esta vez use una integración numérica. Vea en el problema anterior los detalles. Por último, use un programa de integración numérica para calcular el trabajo efectuado cuando el objeto se mueve a lo largo de la línea $x = y$ desde el origen hasta $x = 2.0$ m, $y = 2.0$ m. Puesto que la fuerza es conservativa, deberá de obtener la misma respuesta (dentro de la precisión del cálculo) para cada trayectoria. (b) La fuerza \mathbf{F} , con componentes $F_x = y^2(1 - x)e^{-x}$, $F_y = xe^{-x}$, y $F_z = 0$, no es conservativa. Calcule el trabajo que efectúa cuando la partícula se mueve desde el origen hasta $x = 2.0$ m, $y = 2.0$ m a lo largo de cada una de las trayectorias descritas en la parte (a). Nótese que no se obtendrá la misma respuesta para trayectorias diferentes.