Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 12.

Ejercicio 1. Para las transformaciones lineales $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que

$$S(x, y, z) = (2x, y + z), \ T(x, y) = (y, x)$$

hallar la composición $T \circ S$. Indicar si es posible hallar la composición $S \circ T$.

Ejercicio 2.

1. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z).$$

   (a) Verificar que el vector $v = (3, 0, 3)$ pertenece a $Im(T)$.
   (b) Verificar que el vector $v = (2, -1, -1)$ pertenece a $N(T)$.

2. Se considera la transformación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(M) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} M.$$

   (a) Verificar que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a $N(T)$.
   (b) Verificar que $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a $Im(T)$.

Ejercicio 3. Use la definición para hallar el núcleo y la imagen de las siguientes transformaciones lineales:

1. $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = (p(1) + p(-1), p(0))$;
2. $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \text{traza}\,(A)$;

Ejercicio 4. Hallar una base del núcleo y la imagen de las siguientes transformaciones lineales:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   donde $B = \{(1, 1, 0), (0, 2, 0), (2, 0, -1)\}$.

2. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$_B(T)_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

   donde

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   y $C = \{x^2, x, 1\}$.

Ejercicio 5. Sea $n = (a, b, c)$ un vector de $\mathbb{R}^3$ de norma 1. Considere la transformación $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $P(v) = \langle v, n \rangle n$ y la transformación Q definida por $Q = I - P$ donde I es la transformación identidad en $\mathbb{R}^3$.
Hallar el núcleo y la imagen de las transformaciones P y Q. Interpretar geométricamente.

Ejercicio 6.

1. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación definida por la matriz

$$_{\mathcal{C}}(P)_{\mathcal{C}} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

   donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Hallar núcleo e imagen de la transformación lineal.
   (b) Verificar que $P = P^2$.
   (c) Interpretar geométricamente.

2. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación definida por la matriz

$$_{\mathcal{C}}(P)_{\mathcal{C}} = 1/6 \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

   donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Hallar núcleo e imagen de la transformación lineal.
   (b) Verificar que $P = P^2$.
   (c) Probar que $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$.
   (d) Interpretar geométricamente.

Ejercicio 7. Se consideran las transformaciones $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & y \\ y & y - z \end{pmatrix},$$

y

$$S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$$

definida por

$$S(A)(x) = (1, x)A \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Verificar que T y S son lineales, y hallar el núcleo y la imagen de T, S, y $S \circ T$.

Ejercicio 8. Sea $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X$$

1. Hallar $N(T)$ e $Im(T)$.
2. Verificar que $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$.