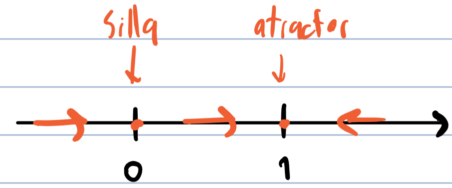
Examen Febrero 2025

Ej 1

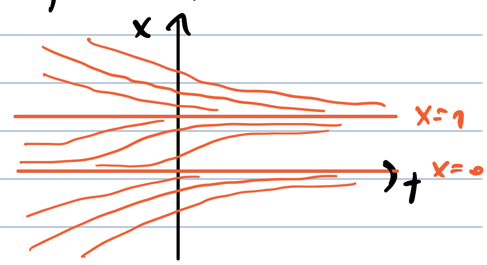
a) Consideramos la ec. $\dot{x} = x^2(1-x)$.

- Los ptos de equilibrio son $x=0$ y $x=1$
- Estudiando signo obtenemos el diagrama de fase



Observar que toda solución con $x(t_0) > 1$ ó $x(t_0) < 0$ a pasado tiende a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente, pues si tendieran a un punto z, este debería ser un crítico.

Con esta información podemos dibujar boceto de soluciones: $\longrightarrow$



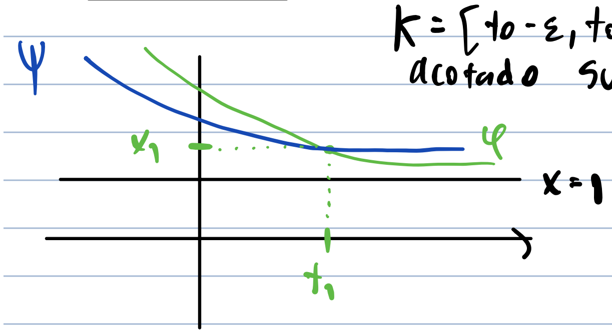
Estudiemos intervalos maximales: Sea $\varphi(t)$ solución con cond. inicial $x(t_0) = x_0$

- Si $x_0 = 0$ ó $x_0 = 1$, $\varphi(t)$ cte y $I_{max} = \mathbb{R}$.

- Si $x_0 \in (0,1)$: Con argumento clásico de escape de compactos, tomando

  $K = [t_0 - L, t_0 + L] \times [0,1]$ con L arbitrariamente grande probamos que $I_{max} = \mathbb{R}$ (En el examen hay que escribir los detalles del argumento).

- Si $x_0 > 1$: Nuevamente con arg. clásico de escape de compactos, utilizando $K = [t_0 - \varepsilon, t_0 + L] \times [1, x_0 + d]$ probamos que I_{max} no está acotado superiormente.



Luego, como $\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = +\infty$ tomamos t_1 tal que $x_1 := \varphi(t_1) > 2$.

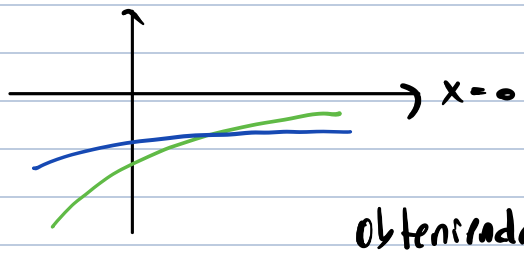
Observar que $x^2(1-x) < -x^2$ si $x > 2$

Luego, si ψ solución de $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$, si $t < t_1$ $\psi(t) < \varphi(t)$.

Utilizando sugerencia adaptada a $\dot{x} = -x^2$, $I_{max}(\psi)$ acot inferiormente, por lo tanto $I_{max}(\varphi)$ también.

Luego $I_{max}(\varphi)$ es de la forma $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$.

- Si $x_0 < 0$: Análogo a parte anterior. En este caso usamos la comparación al revés:



$$x^2(1-x) > x^2 \quad \text{si } x<0$$

Comparamos con la solución φ de $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(t_0) = x_0 < 0 \end{cases}$

obteniendo nuevamente que $I_{max}(\varphi)$ es de la forma $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{cases} \dot{x} = x^2(1-x) \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

I) Ptos de eq: $(0,0)$ y $(1,0)$.

Si $V(x,y) = a(x-1)^2 + by^2$, $\quad \nabla V(x,y) = (2a(x-1), 2by)$

Si $(x(t), y(t))$ solución, $\frac{d}{dt}\Big(V(x(t),y(t))\Big) = \nabla V(x(t),y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$

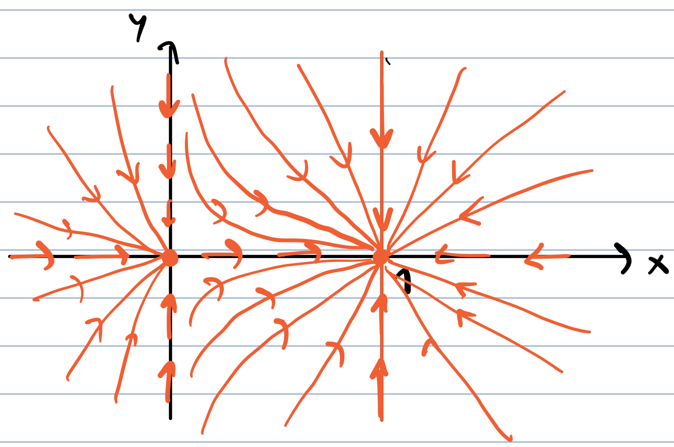
$$= -2a\,x^2(x-1)^2 - 2by^2$$

- tomando $a>0, b>0$ obtenemos que para (x,y) en un entorno de $(1,0)$, $\dot{V}(x,y) < 0$.
- Además se verifica que $(1,0)$ es mínimo estricto de V.
- Por Teo de Lyapunov (2) concluimos que $(1,0)$ es un pto de equilibrio <u>asintóticamente estable</u>.

II) El sistema es desacoplado por lo que si $(x(t), y(t))$ solución, $x(t)$ es solución de $\dot{x} = x^2(1-x)$

Como $x=0$ es un pto silla para $\dot{x} = x^2(1-x)$, se tiene que $(0,0)$ es silla para nuestra ecuación (y en particular inestable).

III)



IV) Como el sistema es desacoplado y la ec. en y es lineal, obtenemos como consecuencia de parte a) que si (x_0, y_0) cond inicial:

<u>$x_0 \in [0,1]$</u> : $I_{max} = \mathbb{R}$

<u>$x_0 \notin [0,1]$</u> : $I_{max} = (a, +\infty)$ para $a \in \mathbb{R}$.

Ej 2:

a) I) Observar que $\left| \alpha_K \cos\left(\frac{K\pi}{L}x\right) + \beta_K \operatorname{Sen}\left(\frac{K\pi}{L}x\right) \right| \leq |\alpha_K| + |\beta_K| := M_K$.

Por Criterio de la Mayorante de Weierstrass la serie $\sum \alpha_K \cos\left(\frac{K\pi}{L}x\right) + \beta_K \operatorname{sen}\left(\frac{K\pi}{L}x\right)$ converge uniformemente. Es decir, si

$$S_N(x) = \sum_1^N \alpha_K \cos\left(\frac{K\pi}{L}x\right) + \beta_K \operatorname{Sen}\left(\frac{K\pi}{L}x\right), \quad S_N \rightrightarrows S_\infty.$$

Sumando la cte $\frac{\alpha_0}{2}$ tenemos que la serie propuesta converge a $g := \frac{\alpha_0}{2} + S_\infty$.

II) <u>Si a_n coef de Fourier de coseno de g</u>:

$$a_n = \left\langle g, \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty \sim\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{L}\cdot\sum_1^\infty\left(\alpha_K\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{K\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \beta_K\int_{-L}^{L}\cos(\sim)\operatorname{sen}(\sim)\right)$$

Como $\left\{\cos\left(\frac{K\pi}{L}x\right)\right\} \cup \left\{\operatorname{Sen}\left(\frac{K\pi}{L}x\right)\right\}$ conforman un conj ortonormal,

$$a_n = \left\langle g, \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\rangle = \frac{1}{L}\alpha_n\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \alpha_n$$

Analogamente si b_n es el coef de seno, $b_n = \beta_n$.

Concluimos que $\frac{\alpha_0}{2} + S_\infty$ es la serie de Fourier de g (y conv. unif. a g).

b) I) Cuentas

II) Usar teorema de Dini y evaluar en $x = 0$.