Examen de Ecuaciones Diferenciales

20 de Febrero de 2025.

No. examen	Apellido y nombre	Firma	Cédula

Duración del examen: 4 horas

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. Para la aprobación del examen se requiere resolver correctamente un ejercicio esencialmente completo.

1. *a*) Considere la ecuación diferencial $\dot{x} = x^2(1-x)$ con condición inicial $x(0) = x_0$.
    - Halle puntos de equilibrio.
    - Dibuje diagrama de fase y boceto de soluciones
    - Determine en función de x_0 el intervalo maximal de la solución.

    Se puede asumir lo siguiente: las soluciones no triviales de $\dot{x} = x^2$ tienen intervalo maximal acotado superiormente si $x_0 > 0$ y acotado inferiormente si $x_0 < 0$.

    b) Considere la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2(1-x) \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

    (I) Verificar que el punto $(1,0)$ es de equilibrio. Halle una función de Lyapunov estricta para este punto (verificando que lo es) y concluir sobre su estabilidad. Se sugiere buscar función del tipo $V(x,y) = a(x-1)^2 + by^2$

    (II) Determine el resto de puntos de equilibrio y estudie su estabilidad.

    (III) Dibuje diagrama de fase del sistema

    (IV) Determine intervalos maximales discutiendo en función de la condición inicial

2. *a*) Consideremos dos sucesiones $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ y $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| + |\beta_k| < \infty.$$

    1) Mostrar que la serie

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

    converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función g, continua y $2L-$periódica.

    2) Mostrar que los coeficientes de Fourier de g son $\alpha_k,\ k = 0{,}1, \ldots$ y $\beta_k,\ k = 1{,}2, \ldots$ y que por lo tanto la serie anterior es la serie de Fourier de g. Concluir que la serie de Fourier de g converge uniformemente a g en $\mathbb{R}$.

    b) Consideremos la función 2-periódica definida por

$$f(x) = |x|,\ x \in [-1, 1].$$

1) Probar que la serie de Fourier de f es

$$1/2-\frac{4}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}\cos((2j+1)\pi x).$$

2) Probar que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$