Solución examen febrero 2025
Geometría y Álgebra Lineal 1

Ejercicio 1.

Considerar el sistema de ecuaciones lineales $(S):\left\{\begin{array}{rcl} x+my+z & = & m+2 \\ x+y+mz & = & -2(m+1) \\ mx+y+z & = & m \end{array}\right.$, $m\in\mathbb{R}$.

Indicar la opción correcta:

(A) El sistema de ecuaciones lineales (S) es compatible determinado para todo $m \in \mathbb{R}$.

(B) El sistema de ecuaciones lineales (S) es incompatible para todo $m \in \mathbb{R}$.

(C) Existen únicos valores m_1 y m_2 tales que (S) es incompatible para m_1 y (S) es compatible indeterminado para m_2.

(D) Existe un único valor de m para el cual el sistema (S) es compatible determinado.

(E) El sistema de ecuaciones lineales (S) es compatible indeterminado para todo $m \in \mathbb{R}$.

Solución:

- **Escalerizando la matriz ampliada:**

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & -2(m+1) \\ m & 1 & 1 & m \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m+2 \\ 0 & 1-m & m-1 & -3m-4 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & -m(m+1) \end{array}\right)$$

Si $m\neq 1$

$$(A|b)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m+2 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{-(3m+4)}{(m-1)} \\ 0 & 1+m & 1 & \frac{-m(m+1)}{(1-m)} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m+2 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{-(3m+4)}{(m-1)} \\ 0 & 0 & m+2 & \frac{-2(m+1)(m+2)}{(m-1)} \end{array}\right)$$

Entonces, si $m\neq 1$, $m\neq -2$ (S) es un sistema compatible determinado.

Si $m=1$: $(A|b)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Rightarrow (S)$ es un sistema incompatible.

Si $m=-2$ $(A|b)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow (S)$ es un sistema compatible indeterminado.

- **Calculando el determinate de la matriz asociada:**

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & -2(m+1) \\ m & 1 & 1 & m \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m+2 \\ 0 & 1-m & m-1 & -3m-4 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & -m(m+1) \end{array}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m \end{pmatrix}=(1-m)^2-(m-1)(1-m^2)=(1-m)^2(m+2)$$

Entonces, si $m \neq 1$,$m \neq -2$ (S) es un sistema compatible determinado.

Si $m = 1$: $(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow (S)$ es un sistema incompatible.

Si $m = -2$ $(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow (S)$ es un sistema compatible indeterminado.

Opción correcta **(C)**.

Ejercicio 2.

Sea S_k el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\big\{(1,-1,1),(k,1,k),(-1,k^2,k-2)\big\}, k \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

(A) Existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(S_{k_1}) = \dim(S_{k_2}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1, k_2$.

(B) Para todo $k \in \mathbb{R}$ es $\dim(S_k) = 3$.

(C) Para todo $k \in \mathbb{R}$ es $\dim(S_k) = 2$.

(D) Existe un único $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\dim(S_{k_1}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1$.

(E) Existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(S_{k_1}) = 1$, $\dim(S_{k_2}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1, k_2$.

Solución:

Construyamos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$ a partir de los generadores de S_k.

$$\dim\big(S_k\big) = 3 \Leftrightarrow \big\{(1,-1,1),(k,1,k),(-1,k^2,k-2)\big\} \text{ es linealmente independiente}$$

$$\Leftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \neq 0$$

- Usando el rango tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1+k & k^2-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Si } k \neq 1 \text{ y } k \neq -1 \text{ se cumple que rango}(A) = 3$$

Si $k = 1$: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 2 \Rightarrow \dim(S_1) = 2.$

Si $k = -1$: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 2 \Rightarrow \dim(S_{-1}) = 2.$

- Si resolvemos usando el determinante tenemos que:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1+k & k^2-1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} = (k+1)(k-1) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1, k \neq -1$$

  Repetimos el razonamiento para los casos $k = 1$ y $k = -1$ y concluimos que: Existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(S_{k_1}) = \dim(S_{k_2}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1, k_2$.

Respuesta correcta (**A**).

Ejercicio 3

Considerar el subespacio vectorial $S_a = \left[1 + 2x - x^2, 1 + ax - x^2, a - x - x^2\right]$ de $\mathbb{R}_2[x]$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $p(x) = 1 + x^2$.
Indicar la opción correcta:

(A) El polinomio $p(x) \in S_a$ para exactamente dos valores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

(B) Exite un único vamor $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) \in S_a$ para todo $a \neq a_1$.

(C) El polinomio $p(x) \in S_{a_1}$ para un único valor $a_1 \in \mathbb{R}$.

(D) El polinomio $p(x) \in S_a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(E) Exiten exactamente dos valores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $p(x) \in S_a$ para todo $a \neq a_1, a_2$.

Solución:
$p(x) \in S_a \Leftrightarrow$ existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : p(x) = \alpha\big(1 + 2x - x^2\big) + \beta\big(1 + ax - x^2\big) + \gamma\big(a - x - x^2\big)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + a\gamma & = & 1 \\ 2\alpha + a\beta - \gamma & = & 0 \\ -\alpha - \beta - \gamma & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -1-2a & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \end{array} \right)$$

Entonces, si $a \neq 1$, $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado, por lo tanto existen únicos valores α, β y γ como buscamos $\Rightarrow p(x) \in S_a$.

Si $a = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow$ no existen escalares α, β y γ como buscamos $\Rightarrow p(x) \notin S_1$.

Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow$ no existen escalares α, β y γ como buscamos $\Rightarrow p(x) \notin S_2$.

Respuesta correcta (**E**).

Ejercicio 4.

Sean las rectas $r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & (a+2)\lambda \\ y & = & 1 \\ z & = & a \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + y & = & 2 + a^2 \\ (a-1)x + z & = & a^2 \end{array} \right.$, donde a es un parámetro real diferente de -2 ($a \neq -2$). Indicar la opción correcta:

(A) $r \cap s = \emptyset$ para todo valor de a y no son paralelas para todo valor de a.

(B) Existe un único valor de a para el cual $r \cap s \neq \emptyset$ y las rectas no son paralelas para todo valor de a.

(C) Existen valores de a para los cuales r y s son paralelas y para todo valor de a $r \cap s = \emptyset$.

(D) Existen valores de a para los cuales r y s son paralelas y existe un único valor de a para el cual $r \cap s = \emptyset$.

(E) Existe un único valor de a para el cual $r \cap s \neq \emptyset$ y para todo valor de a las rectas son paralelas.

Solución: Primero determinemos las direcciones de las rectas r y s:
$r : \begin{cases} x &= (a+2)\lambda \\ y &= 1 \\ z &= a \end{cases} \Rightarrow v_r = (1,0,0)$. Por otro lado $s : \begin{cases} ax + y &= 2 + a^2 \\ (a-1)x + z &= a^2 \end{cases}$, si nombramos a la variable $x = \lambda$ concluimos que $s : \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= -a\lambda + (a^2+2) \\ z &= (1-a)\lambda + a^2 \end{cases} \Rightarrow v_s = (1, -a, 1-a)$. Observar que la segunda y la tercera variable no se anulan simultáneamente, por lo tanto r y s no son paralelas para ningún valor de a.
Estudiamos la intersección: sea $(x,y,z) \in r \cap s \Rightarrow (x,y,z) = ((a+2)\lambda, 1, a) \in s$
$\Rightarrow \begin{cases} a(a+2)\lambda + 1 &= 2 + a^2 \\ (a-1)(a+2)\lambda + a &= a^2 \end{cases} \Rightarrow (a+2)\lambda = \dfrac{1+a^2}{a}$ si $a \neq 0$ y $(a-1)\dfrac{1+a^2}{a} + a = a^2$
$\Rightarrow a = 1$.
Es claro que si $a = 0$ las rectas no se cortan. Entonces $r \cap s = \emptyset$ para todo $a \neq 1$.
Respuesta correcta (**B**).

Ejercicio 5.

Considerar la recta $r : \begin{cases} x &= -1 + \lambda \\ y &= 2 - 2\lambda \\ z &= 3 - \lambda \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + y = 4$. La distancia de la recta r al plano π es:

(A) $d(r,\pi) = 0$.

(B) $d(r,\pi) = 4$.

(C) $d(r,\pi) = \sqrt{5}$.

(D) $d(r,\pi) = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

(E) $d(r,\pi) = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$.

Solución: $v_r = (1,-2,-1)$ y la recta pasa por el punto $P = (-1,2,3)$. La dirección normal al plano es $n = (2,1,0)$.
Observar que $\langle v_r, u\rangle = 0 \Rightarrow r \parallel \pi \Rightarrow d(r,\pi) = d(P,\pi) = \dfrac{\langle AP, u\rangle}{\|u\|}$ donde A es un punto del plano π.
Escojamos como punto $A = (2,0,0) \Rightarrow AP = (3,-2,-3)$

$$\Rightarrow \langle AP, u\rangle = \langle (3,-2,-3),(2,1,0)\rangle = 4 \Rightarrow d(r,\pi) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Respuesta correcta (**D**).

Ejercicio 6.

Sean $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$, $T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ y $U = S + T$ subespacios de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Indicar la opción correcta:

(A) $U = S \oplus T$ y $\dim(U) = 3$.

(B) $U = S \oplus T = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(C) $U = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $S \cap T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

(D) $U \neq S \oplus T$ y $\dim(U) = 3$.

(E) $U = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $S \cap T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Solución:

$S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^t\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces $\dim S = 3$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S \cap T \Leftrightarrow \text{ Existen } \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 2\alpha+\beta & -\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a &=& \alpha+\beta \\ b &=& 0 \\ b &=& 2\alpha+\beta \\ c &=& -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $S \cap T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Usando propiedades de dimensión de la suma de subespacios tenemos que: $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 3 + 2 - 1 = 4 \Rightarrow U = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Respuesta correcta (**E**).

Ejercicio 7.

Sea $T : V \to W$ transformación lineal entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales donde $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$ y $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Indicar la opción correcta:

(A) T es inyectiva.

(B) Si T es sobreyectiva entonces $\dim(N(T)) = 1$.

(C) T es la transformación nula.

(D) Si $\dim(N(T)) = 2$ entonces T es sobreyectiva.

(E) T no es inyectiva pero si es sobreyectiva.

Solución:

El teorema de las dimensiones nos dice que:

$$4 = \dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)).$$

Por otro lado, como $Im(T)$ es un subespacio de W tenemos que $\dim(Im(T)) \leq \dim(W) = 2$.

A partir de estos dos resultados concluimos que $\dim(N(T)) \geq 2$. Por lo tanto (**A**) y (**B**) no se cumplen.

También podemos concluir que T no es inyectiva, pero no hay información suficiente para garantizar que sea sobreyectiva o la transformación nula. Si $\dim(N(T)) = 2$ por lo mencionado previamente tenemos que $\dim(Im(T)) = 2$, por lo tanto T es sobreyectiva. Esto muestra que la opción (**D**) es la correcta.

Ejercicio 8.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que $N(T) = \big\{(x, y, z) : x = y, z = x\big\}$, $\mathrm{Im}(T) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\big\}$ y $T(x, y, z) = (x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in Im(T)$. Indicar la opción correcta:

(A) $T(3, 0, 0) = (2, -1, -1)$.

(B) $T(3, 0, 0) = (1, 1, 1)$.

(C) $T(3, 0, 0) = (1, 1, -2)$.

(D) $T(3, 0, 0) = (1, -1, 0)$.

(E) $T(3, 0, 0) = (0, 0, 0)$.

Solución:
$N(T) = \big\{(x, y, z) : x = y, z = x\big\} = \big\{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\big\} = \big[(1, 1, 1)\big]$.
$\mathrm{Im}(T) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\big\} = \big\{(x, y, -x - y) : x, y \in \mathbb{R}\big\} = \big[(1, 0, -1), (0, 1, -1)\big]$.
Consideremos $\mathcal{B} = \big\{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\big\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y observemos que

$$T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$T(1, 0, -1) = (1, 0, -1)$$

$$T(0, 1, -1) = (0, 1, -1)$$

Se puede probar que $(3, 0, 0) = (1, 1, 1) + 2(1, 0, -1) - (0, 1, -1)$. Por lo tanto

$$T(3, 0, 0) = T(1, 1, 1) + 2T(1, 0, -1) - T(0, 1, -1) = (0, 0, 0) + 2(1, 0, -1) - (0, 1, -1) = (2, -1, -1).$$

Respuesta correcta (**A**).

Ejercicio 9.

Sea $T : V \to W$ transformación lineal sobreyectiva entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Indicar la opción correcta:

(A) Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es una base de V entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es una base de W.

(B) $\dim(W) > \dim(V)$.

(C) Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un generador de V entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es un generador de W.

(D) Si $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es linealmente independiente.

(E) Si $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es un generador de W entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un generador de V.

Solución:
Por resultados vistos en teórico sabemos que la propiedad que vale es la **(C)**: Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un generador de V entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es un generador de W. Es fácil construir contraejemplos de las otras afirmaciones.

Ejercicio 10.

Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal, $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B} = \{(0,-3,1),(2,0,1),(-3,0,2)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Si ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $v = v_1 + 2v_2 - v_3$ entonces:

(A) $T(v) = (4,-2,1)$.

(B) $T(v) = (5,-5,1)$.

(C) $T(v) = (-7,-12,4)$.

(D) $T(v) = (-13,-15,2)$.

(E) $T(v) = (1,2,-1,0)$.

Solución:

$$v = v_1 + 2v_2 - v_3 \Rightarrow \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $T(v) = 4(0,-3,1) - 2(2,0,1) + (-3,0,2) = (-7,-12,4)$.

Respuesta correcta (**C**).