Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 1

Solución del examen 3 de febrero de 2025

Respuestas Falso o Verdadero: rellenar con **F** o **V**					
FV1	FV2	FV3	FV4	FV5	FV6
F	F	F	V	F	F

Correcta: 5 puntos. *Incorrecta*: -3 puntos. *Sin responder*: 0 puntos.

Respuestas múltiple opción: rellenar con **A**, **E**, **O** o **U**					
MO1	MO2	MO3	MO4	MO5	MO6
A	O	O	E	O	O

Correcta: 12 puntos. *Incorrecta*: -4 puntos. *Sin responder*: 0 puntos.

Falso o Verdadero

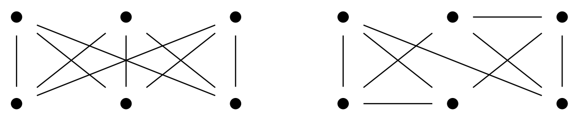
1. Si en un supermercado compro m productos distintos y en la caja pido n bolsas para poder cargar todos los productos, entonces la cantidad de formas de embolsar los productos es $Sob(m, n)$.

Asúmase que todas las bolsas son iguales, y que no pedimos bolsas de más, o sea, no quedan bolsas vacías.

Solución: **F**.

La cantidad correcta sería $S(m, n)$ los números de Stirling de segunda especie. Si fueran todas las bolsas diferentes, sería $Sob(m, n)$, pero **no** es lo que dice la letra.

2. Los siguientes grafos son isomorfos:



Solución: **F**.

El grafo de la izquierda es bipartito, y el grafo de la derecha no.

3. El recorrido más largo en K_8 tiene longitud 27.

Solución: **F**.

Recordar que un recorrido es un camino abierto que no repite aristas. A su vez el grafo K_8, completo de ocho vértices, tiene $\frac{8\times 7}{2}$ aristas, o sea 28 aristas. Por lo tanto si existiese un recorrido con 27 aristas, estaríamos usando todas las aristas excepto una (llamemos α la arista no recorrida). O sea tendríamos un recorrido euleriano del grafo $K_8 - \alpha$, donde seis vértices tendrían grado impar: *absurdo*.

4. El coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^4$ es 648.

Solución: **V**.

El coeficiente de x^5 en el multinomio se forma en los siguientes casos:

- $12 \times (1)^2 \times (2x)^0 \times (3x^2)^1 \times (4x^3)^1 = 144x^5$;
- $12 \times (1)^1 \times (2x)^2 \times (3x^2)^0 \times (4x^3)^1 = 192x^5$;
- $4 \times (1)^0 \times (2x)^3 \times (3x^2)^1 \times (4x^3)^0 = 96x^5$;
- $12 \times (1)^1 \times (2x)^1 \times (3x^2)^2 \times (4x^3)^0 = 216x^5$.

Total: $648x^5$.

5. Hay más de 100 funciones estrictamente crecientes $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Recordar que una función es estrictamente creciente si para todo par de puntos en el dominio $x < y$, se tiene que $f(x) < f(y)$.

Solución: **F**.

Hay $C^6_4 = 15$ de tales funciones, pues quedan determinadas conociendo su codominio, un subconjunto de 4 elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De esos cuatro elementos elegidos, el más chico será $f(1)$, el siguiente en orden creciente $f(2)$, el siguiente $f(3)$ y el mayor de los elegidos será $f(4)$.

6. Aunque $D_3 < P_3 - D_3$ y $D_4 < P_4 - D_4$, para todo $n \geq 5$ se verifica que $D_n \geq P_n - D_n$.

Recordar que $P_n = n!$ es el número de permutaciones de n elementos y D_n son los desórdenes de n elementos.

Solución: **F**.

Falso: $P_5 = 5! = 120$, y $D_5 = 44$, por lo tanto no se verifica la inecuación ya en $n = 5$.

Recordar también que $\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{P_n} = \frac{1}{e}$. Por lo tanto se podría probar que $2D_n < P_n$, para todo $n \geq 3$ (lo contrario a la afirmación del ejercicio).

Múltiple Opción

1. Se desean escribir claves de seguridad de 4 caracteres usando las vocales `a, e, i, o, u`, las cifras `1, 2` y los caracteres especiales `#, *, @`. ¿Cuántas de estas claves es posible definir de modo que todas contengan al menos una cifra, al menos un caracter especial y al menos una vocal? (Se permiten repetir caracteres).

Solución: **3600**.

Hay varias formas de llgar a este resultado. Transcribimos aquí una de las posibles soluciones. Aplicamos PIE con las siguientes condiciones:

- $C_1 \leftrightarrow$ "La clave no contiene dígitos";
- $C_2 \leftrightarrow$ "La clave no contiene caracteres especiales";
- $C_3 \leftrightarrow$ "La clave no contiene vocales".

Aplicamos el PIE y obtenemos que el conteo buscado es:

$$N - (|C_1| + |C_2| + |C_3|) + (|C_1 \cap C_2| + |C_1 \cap C_3| + |C_2 + C_3|) \text{ (observar que } C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \emptyset).$$

Ahora tenemos: $N = 10^4 = 10000$ porque en total hay 10 caracteres. $|C_1| = 8^4 = 64 \times 64 = 4096$ porque usamos solamente 5 vocales y 3 caracteres especiales, es decir, 8 caracteres en total. Razonando análogamente, $|C_2| = 7^4 = 49 \times 49 = 2401$, $|C_3| = 5^4 = 625$, $|C_1 \cap C_2| = 5^4$, $|C_1 \cap C_3| = 3^4 = 81$ y $|C_2 \cap C_3| = 2^4 = 16$. Ahora sumamos todo y tenemos $10000 - (4096 + 2401 + 625) + 625 + 81 + 16 = 3600$.

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. En este conjunto planteamos posibles relaciones de equivalencia según los siguientes datos:

- $[10] = \{10\}$; $[3] = [5]$; $\#[9] = 2$; $\#[5] = 5$.
- Hay una clase que contiene al menos 3 elementos pares de A.
- Existe un único $x \in A$ tal que $[x] = \{x, x + 1\}$.
- 1 y 2 no están relacionados.

A) Hay exactamente 4 relaciones de equivalencia que verifican los datos y todas tienen 4 clases.
E) Hay exactamente 4 relaciones de equivalencia que verifican los datos y en todas la única clase de equivalencia con un solo elemento es $[10] = \{10\}$.
O) En todas las relaciones de equivalencia que verifican esos datos se cumple que: $[2] = [4]$.
U) En todas las relaciones de equivalencia que verifican esos datos se cumple que: $6 \in [3]$.

Solución: **O**.

En la clase del 5 (que es la clase del 3) hay cinco elementos. La clase del 10 tiene un solo elemento y luego hay una clase con dos elementos de la forma $[x] = \{x, x + 1\}$. En total ya hay 8 elementos de los 10, en las clases descritas antes. Por lo tanto, para poder satisfacer la condición: "hay una clase que contiene al menos 3 elementos pares de A", la única posibilidad es que esta sea la clase $[5] = [3] = \{3, 5, a, b, c\}$ con a, b, c elementos pares.

A su vez la clase $[x] = \{x, x + 1\}$ tiene las siguientes posibilidades: $\{6, 7\}$, $\{7, 8\}$ y $\{8, 9\}$. No puede ser $\{1, 2\}$ porque 1 y 2 no están relacionados; y tampoco puede ser $\{2, 3\}$, ni $\{3, 4\}$, ni $\{4, 5\}$, ni $\{5, 6\}$, porque la clase del 3 y del 5 tiene cinco elementos.

Teniendo en cuenta esos análisis, quedan los siguientes casos:

$$\{6, 7\},\ \{3, 5, 2, 4, 8\},\ \{1, 9\},\ \{10\};$$
$$\{7, 8\},\ \{3, 5, 2, 4, 6\},\ \{1, 9\},\ \{10\};$$
$$\{8, 9\},\ \{3, 5, 2, 4, 6\},\ \{1, 7\},\ \{10\};$$
$$\{8, 9\},\ \{3, 5, 2, 4, 6\},\ \{1\}, \{7\},\ \{10\}.$$

Con lo cual la respuesta correcta es la O.

3. La cantidad de soluciones a la inecuación $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$ con $x_i \in \mathbb{Z}$, $2 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 6$ y $0 \leq x_3 \leq 6$ es:

A) 25 **E**) 36 **O**) 80 **U**) 153

Solución: **O**. Ls soluciones de la inecuación: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$ con $x_i \in \mathbb{Z}$, $2 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 6$ y $0 \leq x_3 \leq 6$ están en correspondencia con las soluciones de la inecuación: $y_1 + y_2 + y_3 \leq 6$ con $y_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq y_1 \leq 4$, $0 \leq y_2 \leq 6$ y $0 \leq y_3 \leq 6$. Así los casos son:

- $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, 1 solución;
- $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, 3 soluciones;
- $y_1 + y_2 + y_3 = 2$, 6 soluciones;
- $y_1 + y_2 + y_3 = 3$, 10 soluciones;
- $y_1 + y_2 + y_3 = 4$, 15 soluciones;
- $y_1 + y_2 + y_3 = 5$, 20 soluciones;
- $y_1 + y_2 + y_3 = 6$, 25 soluciones.

(en todos los casos atendiendo a las restricciones definidas arriba).

Total 80 soluciones.

4. Considere las siguientes afirmaciones, para $n \geq 3$:

I) El grafo K_n tiene al menos un circuito euleriano para todo n impar.
II) El grafo C_n tiene al menos un circuito euleriano y un camino hamiltoniano para todo n.
III) Cualquier subgrafo inducido por vértices de K_n es isomorfo a K_m para algún $m \leq n$.
IV) Existen grafos con n vértices que no son isomorfos a ningún subgrafo de K_n.

Seleccione la opción correcta:

A) I y II son verdaderas, III y IV son falsas.
E) I, II y III son verdaderas, IV es falsa.
O) II y IV son verdaderas, I y III son falsas.
U) I, III y IV son verdaderas, II es falsa.

Solución: **E**.

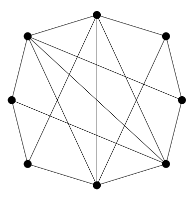
I) es verdadera pues si n es impar el grado de todos los vértices de K_n es par.

II) es verdadera pues el camino que une a todos los vértices del ciclo C_n en forma horaria (o antihoraria) es un circuito euleriano y también un camino hamiltoniano (en este caso no usar la última arista).

III) es verdadera, pues elegidos los m vértices, cualquiera sean, el grafo **inducido** también será completo. *Observar que la letra dice, subgrafo inducido.*

IV) es falsa, pues dado un grafo G con n vértices, se completa con aristas hasta obtener el grafo completo K_n, del cual G será un subgrafo.

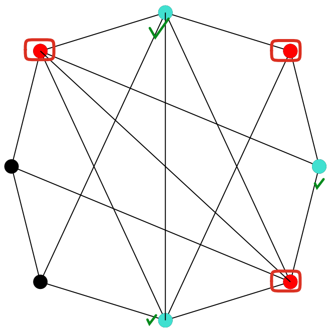
5. Se considera el grafo:



A) El grafo es plano.
E) El grafo no es plano porque contiene un subgrafo homeomorfo a K_5, pero no contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$.
O) El grafo no es plano porque contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$, pero no contiene un subgrafo homeomorfo a K_5.
U) El grafo no es plano, contiene un subgrafo isomorfo a K_5 y otro homeomorfo a $K_{3,3}$.

Solución: **O**.

El grafo tiene sólo 4 vértices de grado mayor o igual a 4, así que no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5. En cambio, sí contiene un $K_{3,3}$, que está indicado en la siguiente figura:



6. La cantidad de relaciones R sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ que verifica la propiedad $(i, j) \in R \Leftrightarrow (i+1, j+1) \in R$ para todo $1 \leq i < 4$ y $1 \leq j < 4$ viene dada por:

A) 64 **E**) 100 **O**) 128 **U**) 256

Solución: **O**.

Observemos que $(1, 2) \in R$ si y solo si $(2, 3) \in R$, y si y solo si $(3, 4) \in R$.
A la vez, $(1, 3) \in R$, si y solo si $(2, 4) \in R$.
De la misma manera $(2, 1) \in R$ si y solo si $(3, 2) \in R$, y si y solo si $(4, 3) \in R$.
Y a su vez $(3, 1) \in R$ si y solo si $(4, 2) \in R$.
Por último: $(1, 1) \in R$ si y solo si $(2, 2) \in R$, y si y solo si $(3, 3) \in R$, si y solo si $(4, 4) \in R$.

En total tenemos 7 grados de "libertad": $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, cada una de estas parejas pueden estar o no estar en R. El resto de las relaciones quedan determinadas por estas parejas.

Total $2^7 = 128$ casos.