Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables.**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Diciembre 2024**

EXAMEN – SÁBADO 21 DE DICIEMBRE DE 2024

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El examen dura 3 horas.
- Hay 5 ejercicios de múltiple opción de 10 puntos cada uno y 3 ejercicios de desarrollo. El examen es de 100 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- Cada respuesta incorrecta en los ejercicios de múltiple opción resta 2 puntos. Preguntas sin contestar suman 0 puntos.
- Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

EJERCICIOS DE MÚLTIPLE OPCIÓN
5 ejercicios, 50 puntos totales.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
A	A	B	C	B

(1) **Ejercicio 1. (10 pts.)** Se considera la ecuación diferencial $y' = -a\sin(bx)y$, donde a y b son números reales. Si $y(x) = e^{\cos(2x)}$ es solución, entonces:

A) $a = b = 2$.

B) No existen valores de a y b para que $y(x) = e^{\cos(2x)}$ sea solución de la ecuación diferencial.

C) $a = 1$, $b = 2$.

D) $a = -1$, $b = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(2) **Ejercicio 2. (10 pts.)** Se considera el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : ze^{i\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}\}$. Indicar la opción correcta:

A) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0\}$.

B) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$.

C) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.

D) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)\}$.

(3) **Ejercicio 3. (10 pts.)** Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \log(xy)$, donde D es el mayor conjunto donde la función f está definida. Se consideran las siguientes afirmaciones:

I) $(0, 0)$ pertenece a la frontera del conjunto D.

II) D es un conjunto abierto y no acotado.

III) $(-1, 1) \in D$.

IV) El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \subseteq D$.

Indicar la opción correcta:

A) Solamente II es verdadera.

B) Solamente I y II son verdaderas.

C) Solamente II y IV son verdaderas.

D) Solamente I y IV son verdaderas.

(4) **Ejercicio 4. (10 pts.)** Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función para la cual se sabe que:

- $f(x, y) = \frac{1}{2}$ si $x^2 < y < |x|$.
- $f(x, y) = 0$ si $xy = 0$ o $|x| = |y|$,

Indicar la opción correcta:

A) f es diferenciable en $(0, 0)$ y por lo tanto es continua en $(0, 0)$ y existen todas las derivadas direccionales de f en $(0, 0)$.

B) f es continua en $(0, 0)$ pero no es diferenciable en $(0, 0)$.

C) f no es continua en $(0, 0)$ pero existen las derivadas parciales de f en $(0, 0)$ y también las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para $v \in \{(1, 1), (-1, 1)\}$.

D) f no es continua en $(0, 0)$ pero existen las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para todo $v = (x, mx)$ con $0 < m < 1$ y $x \neq 0$.

(5) **Ejercicio 5. (10 pts.)** Sea $I = \int\int_T \sin(x)\cos(y)\, dy\, dx$, donde

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi/2], 0 \leq y \leq \cos(x)\}.$$

Indicar la opción correcta:

A) $I = +\infty$.

B) $I = 1 - \cos(1)$.

C) $I = \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

D) $I = \frac{\pi}{8}$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO

(1) **Ejercicio 1 (25 pts.)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
- f es integrable en $[t_0, t]$ para todo $t_0, t \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq t_0 \leq t$,
- $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge,
- Existe $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Se pide:

(a) **(10 pts.)** Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que

$$\int_{t_0}^{t} (L - \varepsilon)\, dx < \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx < \int_{t_0}^{t} (L + \varepsilon)\, dx$$

para todo $t > t_0$.

(b) **(5 pts.)** Demostrar que si $L > 0$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y t_0 tales que

$$0 < (L - \varepsilon)(t - t_0) < \int_{t_0}^{t} f(x)\, dx$$

para todo $t > t_0$.

(c) **(10 pts.)** Concluir que $L = 0$.

Solución:

(a) Por hipótesis, sabemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \geq t_0.$$

Por lo tanto,

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \quad \text{para todo } x \geq t_0.$$

Integrando ambos lados de esta desigualdad en el intervalo $[t_0, t]$, obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t} (L-\varepsilon)\,dx < \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx < \int_{t_0}^{t} (L+\varepsilon)\,dx.$$

(b) Supongamos que $L > 0$. Podemos tomar $\varepsilon = \frac{L}{2}$, y usando el resultado anterior, existe t_0 tal que:

$$\int_{t_0}^{t} (L-\varepsilon)\,dx < \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx.$$

Esto implica que:

$$(L-\varepsilon)(t-t_0) < \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx.$$

Por lo tanto, para todo $t > t_0$ tenemos:

$$0 < (L-\varepsilon)(t-t_0) < \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx.$$

(c) Supongamos por absurdo que $L \neq 0$. Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $L > 0$. Ahora, por el apartado anterior, sabemos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que:

$$0 < (L-\varepsilon)(t-t_0) < \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx$$

para todo $t > t_0$. En particular, al tomar el límite cuando $t \to \infty$, obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} (L-\varepsilon)(t-t_0) < \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx < \infty.$$

Sin embargo, el término $(L-\varepsilon)(t-t_0)$ crece sin límite conforme $t \to \infty$, ya que $L - \varepsilon > 0$. Lo cual es una contracción.

Por lo tanto, $L = 0$.

(2) **Ejercicio 2 (10 pts.)** Clasificar, justificando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Solución: Sea $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Calculamos el cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Dado que este límite es menor que 1, la serie converge por el criterio del cociente, (Ver Proposicion 3.42 Notas del curso.)

(3) **Ejercicio 3 (15 pts.)** Clasificar, justificando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx.$$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx.$$

Primero evaluamos $\int_0^\infty xe^{-x^2/2}\,dx$. Para esto, calculamos:

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} xe^{-x^2/2}\,dx.$$

Resolviendo la integral, sabemos que:

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left(-e^{-t^2/2} + e^0\right) = 1.$$

Por otro lado, dado que $xe^{-x^2/2}$ es una función impar ($f(-x) = -f(x)$), se cumple entonces que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2/2}\,dx = 0.$$