Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 1

Examen 14 de diciembre de 2024 - Versión 1 (Soluciones)

Verdadero o Falso

1. Hay 29 hojas repartidas en 7 pilas, entonces existe al menos una pila que contiene al menos 5 hojas.

Si todas las pilas tuviesen a lo sumo 4 hojas entonces habrían a lo sumo $7 \cdot 4 = 28 < 29$ hojas en total lo cual es una contradicción. La respuesta es Verdadero (las otras versiones son similares).

2. La sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ dada por $a_n = 2^{n+2} + 4$ verifica una recurrencia homogénea de grado 2 con coeficientes constantes.

La sucesión puede escribir en la forma $a_n = a2^n + b1^n$ con $a = b = 4$ por lo tanto es Verdadero (las otras versiones son similares, solo cambia los valores de a y b).

3. Una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ verifica una relación de recurrencia homogénea de grado 2 con coeficientes constantes. Los primeros términos son $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$. Entonces $a_4 = 1$.

Sabemos que $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$ para todo $n \geq 0$ con $A, B \in \mathbb{R}$ y $B \neq 0$.
Con $n = 0$ obtenemos $a_2 = A+2B = 1$ de donde $A = 1-2B$, substituyendo nos queda $a_{n+2} = (1-2B)a_{n+1}+Ba_n = a_{n+1} + B(a_n - 2a_{n+1})$. Con $n = 1$ obtenemos $a_3 = (1 - 2B) + B = 2$, de donde $B = -1$ y $A = 1 - 2B = 3$. Luego $a_4 = 3a_3-a_2 = 6-1 = 5$. Luego la afirmación es Falsa (para la versión con $a_4 = 5$ la respuesta es Verdadero).

4. Sean R y S dos relaciones definidas sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si R y S verifican la propiedad P entonces su unión $R \cup S$ también. La propiedad P a considerar dependía de la versión de parcial.

- $P =$ antisimétrica: Falso, contraejemplo $R = \{(1, 2)\}$ y $S = \{(2, 1)\}$.
- $P =$ transitiva: Falso, contraejemplo $R = \{(1, 2)\}$ y $S = \{(2, 1)\}$.
- $P =$ simétrica: Verdadero, si $(a, b) \in R \cup S \Rightarrow (a, b) \in R$ o $(a, b) \in S$. Supongamos $(a, b) \in R$, como R es simétrica entonces $(b, a) \in R$ y por lo tanto $(b, a) \in R \cup S$ (si $(a, b) \in S$ el razonamiento es análogo).

5. Se considera el conjunto $A = \{X : X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}, |X| \text{ es par}\}$ con el orden parcial dado por: $X \leq Y$ si $X \subseteq Y$. Entonces $(A, \leq)$ posee una cadena con 3 elementos y una anticadena con 10 elementos.

Verdadero, $\emptyset \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ es una cadena de largo 3 y una anticadena de largo 10 está dada por todos los subconjunto de cardinal 2 puesto que $\binom{5}{2} = 10$.

6. Sea G un grafo acíclico con 10 vértices, sin lazos ni aristas múltiples y con exactamente dos componentes conexas. Entonces el grafo G tiene exactamente 12 aristas.

Falso, sean T_1 y T_2 las componentes conexas de G, como G acíclico entonces T_1 y T_2 son árboles. Sean n_i y e_i la cantidad de vértices y aristas de T_i para $i = 1, 2$. Sabemos que $n_1 + n_2 = 10$ por lo tanto la cantidad de aristas de G es $e := e_1 + e_2 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = 10 - 2 = 8$.

Múltiple Opción

1. Se necesita crear una clave de acceso de 6 dígitos usando solamente los dígitos 0, 1, 2 y 3 (todos tienen que aparecer al menos una vez). ¿Cuántas claves con esas condiciones se pueden crear?

La cantidad de claves de acceso de 6 dígitos usando los dígitos $0, 1, 2$ y 3 donde cada dígito puede aparecer o no, es $N = 4^6$. Sea c_i la condición de que el dígito i no aparezca en la clave de acceso, para $i = 0, 1, 2, 3$. Por el principio de inclusión-exclusión, el número de claves de acceso donde cada uno de los dígitos aparece al menos una vez viene dado por: $\overline{N} = N - S_1 + S_2 - S_3$. Por la simetría del problema resulta que $S_1 = \binom{4}{1} \cdot N(c_0) = 4 \cdot 3^6$, $S_2 = \binom{4}{2} \cdot N(c_0 c_1) = 6 \cdot 2^6$ y $S_3 = \binom{4}{3} \cdot N(c_0 c_1 c_2) = 4 \cdot 1^6$. La respuesta correcta es $\overline{N} = 4^6 - 6 \cdot 3^6 + 4 \cdot 2^6 - 4 = 1560$.

---

2. El coeficiente de x^{14} en el desarrollo de $(x^6 - x^2 + 2)^6$ es:

Solución: Por el teorema del multinomio tenemos que

$$(x^6 - x^2 + 2)^6 = \sum_{i+j+k=6} \frac{6!}{i! \cdot j! \cdot k!} \left(x^6\right)^i \left(-x^2\right)^j 2^k = \sum_{i+j+k=6} \frac{6! \cdot (-1)^j \cdot 2^k}{i! \cdot j! \cdot k!} \cdot x^{6i+2j}$$

Para hallar el coeficiente de x^{14} del desarrollo tenemos que encontrar las ternas $(i, j, k) \in \mathbb{N}$, tales que $i + j + k = 6$ y $6i + 2j = 14$. Hay solo 2 ternas que cumplen eso, que son $(i, j, k) = (1, 4, 1), (2, 1, 3)$. Por lo tanto el coeficiente pedido es:

$$\frac{6! \cdot (-1)^4 \cdot 2^1}{1! \cdot 4! \cdot 1!} + \frac{6! \cdot (-1)^1 \cdot 2^3}{2! \cdot 1! \cdot 3!} = 5 \cdot 6 \cdot 2 - 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 = 60 - 480 = -420.$$

---

3. Sea n la cantidad de palabras distintas que se pueden formar usando todas las letras de la palabra COCINO tal que no tenga letras seguidas repetidas. El valor de n es:

Solución: Sea N la cantidad de palabras que se pueden formar sin restricciones, entonces $N = \frac{6!}{2!2!} = 180$ ya que la C y la O están repetidas. Sea N_1 la cantidad de palabras que se pueden formar con las dos C seguidas, entonces $N_1 = \frac{5!}{2!} = 60$ ya que tomamos las dos C como una sola letra, y la O está repetida. Sea N_2 la cantidad de palabras que se pueden formar con las dos O seguidas, de igual manera que antes tenemos que $N_2 = 60$. Por último sea N_3 la cantidad de palabras que se pueden formar con las dos C seguidas y las dos O seguidas, entonces $N_3 = 4! = 24$. Por el principio de inclusión exclusión tenemos que $n = N - N_1 - N_2 + N_3 = 84$.

---

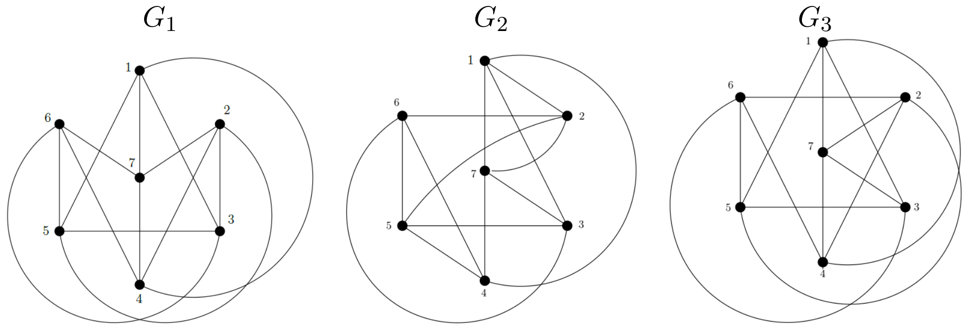
4. Sea $G = (V, E)$ un grafo cuyo grafo complementario $G' = (V, E')$ posee dos componentes conexas, una isomorfa a un ciclo de largo 5 y otra isomorfa a un ciclo de largo 3 (recordar: el grafo complementario queda determinado por la propiedad de que para todo par de vértices distintos $x, y \in V$ se cumple que $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{x, y\} \notin E'$).

La longitud máxima de un recorrido de G es:

Solución: En un grafo con 8 vértices y el complemento es 2-regular, por lo tanto el grafo original es 5-regular. Luego la cantidad de aristas es $|E| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$. Es fácil ver que es conexo (se lo puede dibujar o simplemente observar que contiene un subgrafo recubridor isomorfo a $K_{5,3}$ que es conexo, puesto que vértices en distintas componentes conexas del complemento estarán conectadas en el grafo original). Como tiene 8 vértices de grado impar entonces G no contiene recorrido euleriano. Si le quitamos una arista habrán al menos 6 vértices de grado impar, si le quitamos dos aristas habrán al menos 4 vértices de grado impar y por lo tanto esos subgrafos no pueden tener recorrido euleriano. Por otra parte se observa que es posible quitar tres aristas (elegidas adecuadamente) de forma de que el subgrafo resultante tenga exactamente 2 vértices de grado impar y por lo tanto admita un recorrido euleriano (que recorre 17 aristas de este subgrafo). Este recorrido resulta un recorrido de longitud máxima en el grafo original, por lo tanto la respuesta es 17.

---

5. Se consideran los grafos de la figura:



Se pide determinar cuales son isomorfos (etiquetamos los vértices arbitrariamente para facilitad la discusión de la Solución 2).

Solución 1. El complemento de G_1 y G_2 consiste en una unión disjunta de un 3-ciclo con un 4-ciclo, mientras que el complemento de G_3 resulta un 7-ciclo. Usando que dos grafos son isomorfos si y solo si sus complementos lo son tenemos que los grafos G_1 y G_2 son isomorfos entre sí y no isomorfos a G_3.

Solución 2. Se observa que tanto los grafos G_1 como G_2 poseen tres vértices independientes (sin aristas entre ellos), en el caso de G_1 son los vértices $1, 2$ y 6 y en el caso de G_2 son los vértices $2, 3$ y 4. Sin embargo el grafo G_3 no tiene esa propiedad por lo tanto no puede ser isomorfo a ninguno de los grafos G_1 y G_2. Para ver que G_1 y G_2 son isomorfos podemos construir un isomorfismo $f : G_1 \to G_2$ explícito. Es natural imponer que el isomorfismo lleve los vértices $1, 2, 6$ de G_1 en los vértices $2, 3, 4$ de G_2. Se observa que el subgrafo inducido por $3, 4, 5, 7$ en G_1 consiste de dos aristas $\{3, 5\}$ y $\{4, 7\}$ mientras que el subgrafo inducido por $1, 5, 6, 7$ en G_2 consiste de dos aristas también $\{1, 7\}$ y $\{5, 6\}$. Entonces imponemos que el isomorfismo lleve los vértices $3, 5$ de G_1 en los vértices $1, 7$ de G_2 y los vértices $4, 7$ de G_1 en los vértices $5, 6$ de G_2. Luego podemos chequear directamente que la función $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ induce un isomorfismo de G_1 en G_2.

---

6. (Opción 1) ¿Cuál es la mínima cantidad de elementos distintos que debo seleccionar del conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 24\}$ para asegurarme que existan dos de ellos cuya suma sea 30?

El problema es equivalente a construir un subconjunto X de S con el mayor cardinal posible de S de forma que no existan dos de ellos cuya suma sea 30. Primero observamos que los números $1, 2, 3, 4, 5$ y 15 no suman 30 con ningún otro elemento del conjunto S por lo tanto siempre los podemos agregar a X. Queremos ver ahora cuántos elementos más del conjunto $S' = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$ podemos agregar. Consideramos los palomares $\{6, 24\}, \{7, 23\}, \{8, 22\}, \{9, 21\}, \{10, 20\}, \{11, 19\}.\{12, 18\}, \{13, 17\}, \{14, 16\}$

A) 10 **B**) 13 **C**) 15 **D**) 16

6. (Opción 2) Se considera el grafo G con vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ donde dos vértices se conectan por arista si su suma es un número par. Sea χ su número cromático y $p(\lambda)$ su polinómio cromático. En las diferentes versiones se pregunta por los valores de χ y $p(4)$.

Observar que G tiene dos componentes conexas, una es el subgrafo inducido por los vértices $1, 3, 5$ y 7 (ese subgrafo es isomorfo a K_4) y la otra es el subgrafo inducido por los vértices $2, 4$ y 6 (ese subgrafo es isomorfo a K_3). Para una coloración propia de G (o sea, una forma de colorear los vértices de forma que vértices adyacentes tengan distinto color) precisamos al menos 4 colores (ya que G contiene un K_4) y es claro que 4 colores son suficientes, por lo tanto $\chi = 4$. Suponemos ahora que tenemos $\lambda \geq 4$ colores disponibles y utilizamos la regla del producto para determinar cuántas coloración de los vértices podemos hacer utilizando solo (todos o algunos de) esos λ colores:

- Inicialmente tenemos λ formas de colorear el vértice 1.
- Ya coloreado el vértice 1, tenemos $\lambda - 1$ formas de colorear el vértice 3.
- Ya coloreados los vértices $1, 3$ tenemos $\lambda - 2$ formas de colorear el vértice 5.
- Ya coloreados los vértices $1, 3, 5$ tenemos $\lambda - 3$ formas de colorear el vértice 7.
- Ya coloreados los vértices $1, 3, 5, 7$ tenemos λ formas de colorear el vértice 2.
- Ya coloreados los vértices $1, 3, 5, 7, 2$ tenemos $\lambda - 1$ formas de colorear el vértice 4.
- Ya coloreados los vértices $1, 3, 5, 7, 2, 4$ tenemos $\lambda - 2$ formas de colorear el vértice 6.

Por la regla del producto, el número de coloraciones propias con λ colores es $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$. Por lo tanto $\chi = 4$ y $p(4) = 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 24^2$.
