Matemática Inicial
Examen 17 de diciembre de 2024.

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Importante: En esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

El examen dura 3 horas y es sin material ni calculadora. Poner nombre y cédula en todas las hojas. Al comenzar un nuevo ejercicio, hacerlo en una carilla nueva.

Puntajes (uso docente)

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Total

Ejercicio 1 *(22 puntos)*

1. *Hallar A el conjunto solución de la inecuación:*

$$|2x-3| > 5$$

2. *Hallar B el conjunto solución de la inecuación:*

$$\frac{x^2+2x-3}{e^x-1} \leq 0$$

3. *Hallar $A \cap B^c$ siendo A y B los conjuntos hallados en las partes anteriores.*

Solución

1. Utilizando la definición de valor absoluto obtenemos que:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3 & \text{si } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

   a) Si $x \geq \frac{3}{2}$ la inecuación queda $2x-3 > 5$ lo que es equivalente a $x > 4$ y por lo tanto la solución en esta zona es $Sol_1 = [\frac{3}{2}, +\infty) \cap (4, +\infty) = (4, +\infty)$

   b) Si $x < \frac{3}{2}$ la inecuación queda $-2x+3 > 5$ lo que es equivalente a $x < -1$ y por lo tanto la solución en esta zona es $Sol_2 = (-\infty, \frac{3}{2}) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -1)$

   En conclusión, $A = Sol_1 \cup Sol_2 = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

2. Para resolver esta inecuación observamos en primer lugar que $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y por lo tanto en 0 la inecuación no queda bien definida.
   A continuación estudiamos el signo de $x^2 + 2x - 3$ y obtenemos que

   - $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ si $x \geq 1$ o $x \leq -3$
   - $x^2 + 2x - 3 < 0$ si $-3 < x < 1$.

Por otro lado analizamos el signo de $e^x - 1$

- $e^x - 1$ será positivo si $x > 0$
- $e^x - 1$ es negativo si $x < 0$.

Combinando ambos signos obtenemos que $\frac{x^2+2x-3}{e^x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ o $0 < x \leq 1$ y por lo tanto

$$B = (-\infty, -3] \cup (0, 1]$$

3. Tenemos que $B^c = (-3, 0] \cup (1, +\infty)$ y entonces $A \cap B^c = (-3, -1) \cup (4, +\infty)$

Ejercicio 2 *(20 puntos) Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 8}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 5x - 2}{\ln(x) + x^5}$

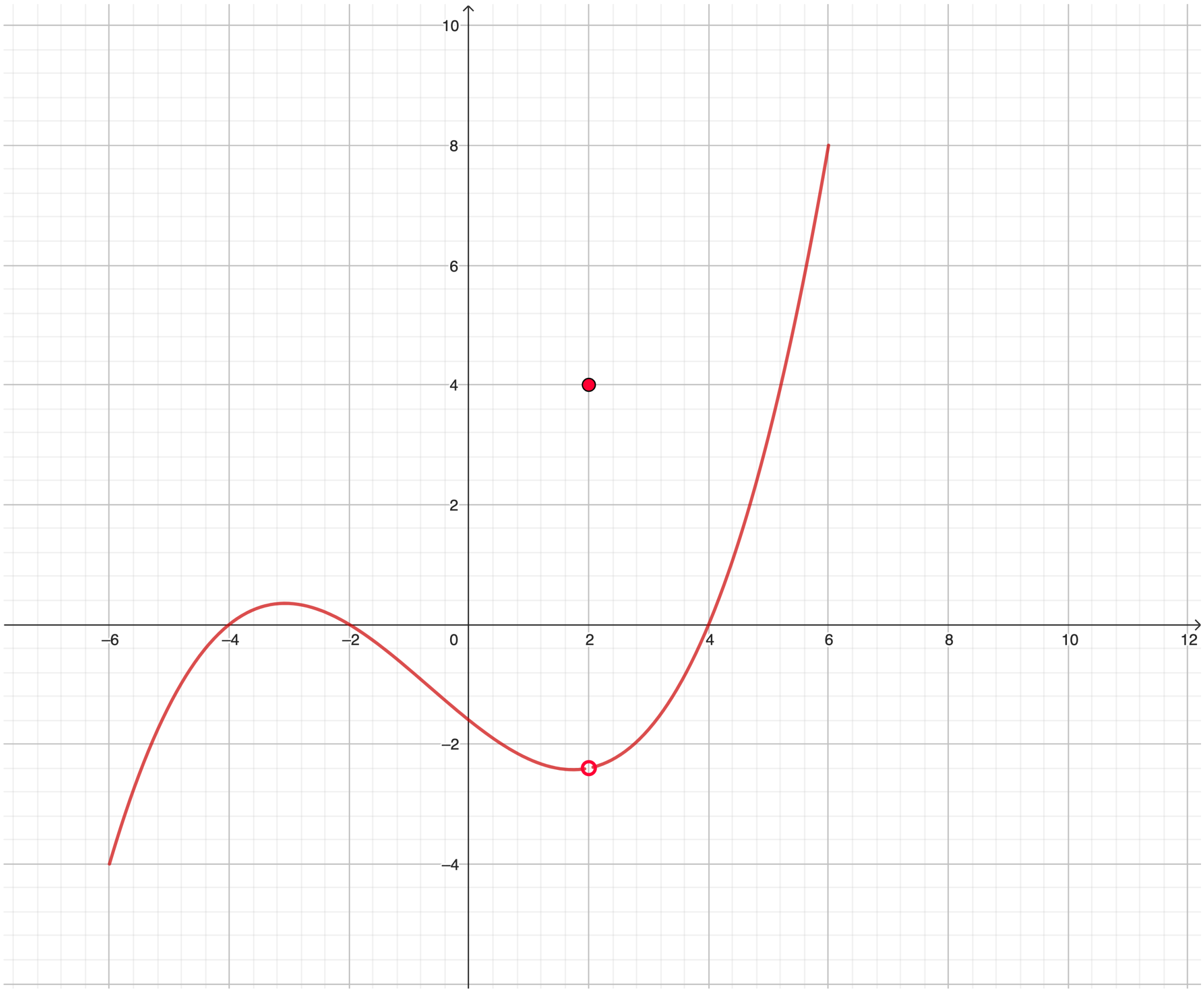
Solución

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-x^2-2x}{x^2+2x-8} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+4)} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+5x-2}{\ln(x)+x^5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Matemática Inicial
Examen 17 de diciembre de 2024.

Ejercicio 3 *(28 puntos) Considera $f : [-6,6] \to \mathbb{R}$ dada por el gráfico que se muestra a continuación:*



1. *Hallar las raíces de f.*
2. *Hallar el conjunto de preimágenes de $\{-2\}$ (dar valores aproximados)*
3. *Hallar el conjunto $Im(f)$.*
4. *¿ Existe el límite $\lim_{x\to 2} f(x)$? En caso afirmativo calcularlo.*
5. *Estudiar la continuidad de f en x=2. Justifique.*
6. *Encontrar un intervalo $[a,b] \subset [-6,6]$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$.*
7. *¿ La función $f : [-6,6] \to \mathrm{Im}(f)$ es invertible? Justifique su respuesta.*

Solución

1. El conjunto de raíces es $\{-4,\ -2,\ 4\}$
2. El conjunto de preimágenes de -2 es $\{0{,}5,\ 2{,}8,\ -5{,}3\}$
3. El conjunto imagen es el intervalo cerrado $[-4,8]$.
4. Si, ya que se observa en el gráfico que los límites laterales coinciden y dan $-2{,}4$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -2{,}4$$

5. La función no es continua en $x = 2$ ya que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$.
6. El intervalo $[-2, 1]$ cumple con la condición pedida (observemos que en dicho intervalo la función es estrictamente decreciente).
7. La función f no es invertible ya que no es inyectiva, por ejemplo $f(-4) = f(-2) = 0$.

Ejercicio 4 *(30 puntos) Se consideran las siguientes funciones:*

- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{2}{x}$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = (x-1)^2$.

1. *Justificar por qué la composición $f \circ g$ no está bien definida.*
2. *Justificar que la composición $g \circ f$ está bien definida y hallar la función compuesta $h = g \circ f$.*
3. *Calcular la función derivada h'.*
4. *¿Es la función h inyectiva? justifique su respuesta.*

Solución

1. *Tenemos que probar que* $\mathrm{Im}(g)$ *no está incluida en el dominio de f, es decir que existe algún valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 0$. Este valor es $x = 1$.*
2. *Está bien definida ya que el dominio de g son todos los reales y por tanto contiene a la imagen de f. La función compuesta $h = g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ está definida por*

$$h(x) = g(f(x)) = (f(x) - 1)^2 = \left(\frac{2}{x} - 1\right)^2 = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} + 1$$

3. *La función derivada h' está dada por:*

$$h'(x) = \left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} + 1\right)' = \left(\frac{4}{x^2}\right)' - \left(\frac{4}{x}\right)' = -\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2}$$

Otra opción es calcularla usando la regla de la cadena:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 2(f(x) - 1)f'(x) = 2\left(\frac{2}{x} - 1\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2}$$

4. *La función h no es inyectiva ya que está definida por una expresión elevada al cuadrado. Por ejemplo tenemos que: $h(-1) = (-3)^2 = 9$ y $h(1/2) = 3^2 = 9$. Otra forma de ver que no es inyectiva es observando que $h'(x) = \frac{-4}{x^2}\left(\frac{2}{x} - 1\right)$ que tiene un cambio de signo en $x = 1$.*