Solución examen diciembre 2024
Geometría y Álgebra Lineal 1

Ejercicio 1.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & c & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Indicar la opción correcta:

(A) Si $a = b = c$ entonces rango$(A) = 2$. **FALSO:** Si $a = b = c = 0$ entonces rango$(A) = 1$.

(B) Si $a = 2b$, $c = 3b$ entonces rango$(A) = 1$. **FALSO:** Si tomamos $b = 1$ entonces

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(C) Si $a = 0$, $b = c \neq 0$ entonces rango$(A) = 2$. **VERDADERO:**

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(D) Si $b = 2a$, $c = 3a$ entonces rango$(A) = 2$. **FALSO:** Si $a \neq 0$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 2a & 4 \\ 3 & 3a & 6 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Si $a = 0$: $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1.$

(E) rango$(A) = 3$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. **FALSO**.

Ejercicio 2.

Sean la recta $r)\ (x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(a, b, c)$ y el plano $\pi)\ ax + cy + bz = d$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $r \parallel \pi$ entonces:

(A) $2a + 2b + 2c = 0$.

(B) $2a + b + 3c = 0$.

(C) $a = b = c$.

(D) $d = 0$.

(E) $a^2 = -2bc$.

Solución: Observar que $r \parallel \pi \Leftrightarrow$ la dirección normal n a π y la dirección u de r son ortogonales $\Leftrightarrow \langle n, u\rangle = 0$.
En este caso $n = (a, c, b)$ y $u = (a, b, c)$. Entonces

$$0 = \langle n, u\rangle = \langle (a, c, b), (a, b, c)\rangle = a^2 + cb + bc = a^2 + 2bc \Rightarrow a^2 = -2bc. \quad \textbf{(E)}$$

Ejercicio 3

Sean $r)\ (x,y,z) = (0,1,2) + \lambda(1,-1,1)$ y $P = (-1,-1,1)$. Entonces la distancia del punto P a la recta r es:

(A) $d(P,r) = \sqrt{6}$.

(B) $d(P,r) = \sqrt{\frac{22}{3}}$.

(C) $d(P,r) = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

(D) $d(P,r) = \sqrt{\frac{22}{5}}$.

(E) $d(P,r) = \sqrt{\frac{18}{5}}$.

Solución: Sea $A = (0,1,2)$ y $v = (1,-1,1)$. Entonces

$$d(P,r) = \frac{\|AP \times v\|}{\|v\|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}, \quad (\mathbf{A})$$

donde $\|v\| = \sqrt{3}$ y $AP = (-1,-2,-1)$ entonces $AP \times v = (-3,0,3)$ y $\|(-3,0,3)\| = 3\sqrt{2}$.

Ejercicio 4.

Sean $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, y - t = 0\}$ y $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z - t = 0\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$ y $W = U + V$. Indicar la opción correcta:

(A) $W \neq U \oplus V$ y $\dim(W) = 2$.

(B) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 3$.

(C) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 4$.

(D) $W \neq U \oplus V$ y $\dim(W) = 3$.

(E) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 2$.

Solución:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, y - t = 0\} = \{(x,y,x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1,0),(0,1,0,1)]$$

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z - t = 0\} = \{(x,x,z,z) : x,z \in \mathbb{R}\} = [(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$$

$(x,y,z,t) \in U \cap V \Leftrightarrow x = z, y = t, x = y, z = t \Leftrightarrow x = y = z = t.$

$$\Rightarrow U \cap V = \{(x,x,x,x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,1,1)]$$

$$\Rightarrow W = U + V \neq U \oplus V,$$

$$\dim(W) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3. \quad (\mathbf{D})$$

Ejercicio 5.

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V. Se definen los siguientes subconjuntos de V

$$\mathcal{A} = \{v_1 - v_3, v_1, v_1 + v_2, v_3\}, \quad \mathcal{C} = \{2v_2, v_1 - v_2\}, \quad \mathcal{D} = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_3\}.$$

Indicar la opción correcta:

(A) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son LD y $\mathcal{D}$ es LI.

(B) $\mathcal{A}$ es LD, $\mathcal{D}$ es base y $\mathcal{C}$ es LI.

(C) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son LI y $\mathcal{C}$ es base.

(D) $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son LD y $\mathcal{A}$ es LI.

(E) $\mathcal{C}$ es LI y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son LD.

Solución: $\#\mathcal{A} = 4 > \dim(V) = 3 \Rightarrow \mathcal{A}$ es LD.
$\mathcal{C}$ es LI: $2av_2 + b(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow bv_1 + (2a - b)v_2 = 0 \Rightarrow b = 0, 2a - b = 0 \Rightarrow a = b = 0$. $\#\mathcal{D} = 3 = \dim(V)$, para ver que es base alcanza probar que es LI:

$$a(v_1 + v_2) + b(v_1 - v_3) + c(v_2 - v_3) = (a + b)v_1 + (a + c)v_2 - (b + c)v_3 = 0$$

Usando que $\mathcal{B}$ es base de V concluimos que $a + b = 0$, $a + c = 0$, $b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. Entonces $\mathcal{D}$ es base de V. (**B**).

Ejercicio 6.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformación lineal tal que $N(T) = \big\{(x, y, z) : 2x + y - z = 0, y - z = 0\big\}$, $T(1, 1, 0) = (2, -1)$ y $T(0, 0, 1) = (1, 1)$. Indicar la opción correcta:

(A) $T(1, -1, 0) = (4, 1)$.

(B) $T(1, -1, 0) = (3, 0)$.

(C) $T(1, -1, 0) = (0, -2)$.

(D) $T(1, -1, 0) = (0, 2)$.

(E) $T(1, -1, 0) = (2, -1)$.

Solución:
$(x, y, z) \in N(T) \Rightarrow y = z, 2x + y - z = 0 \Rightarrow y = z, x = 0$

$$\Rightarrow N(T) = \big[(0, z, z) : z \in \mathbb{R}\big] = \big[(0, 1, 1)\big].$$

Por otro lado,

$$(1, -1, 0) = -2(0, 1, 1) + (1, 1, 0) + 2(0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow T(1, -1, 0) = -2T(0, 1, 1) + T(1, 1, 0) + 2T(0, 0, 1) = (0, 0) + (2, -1) + 2(1, 1) = (4, 1).(\mathbf{A})$$

Ejercicio 7.

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta:

(A) No existen valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

(B) Existe un único valor de a para el cual $\dim N(T) = 1$.

(C) Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\dim N(T) = 1$.

(D) Existen infinitos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

(E) Existen exactamente dos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1+a & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & -a & 1-(1+a)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & -a(a+3) \end{pmatrix}$$

Si $a = 0 \Rightarrow rg({}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}) = 1 \Rightarrow \dim(N(T)) = 3$.
Si $a \neq 0 \Rightarrow$ tenemos dos posibilidades:
$a = -3 \Rightarrow rg({}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}) = 2 \Rightarrow \dim(N(T)) = 2$ y
$a \neq 3 \Rightarrow rg({}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}}) = 3 \Rightarrow \dim(N(T)) = 1$.

Entonces existen infinitos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$. (**D**).

Ejercicio 8.

Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases distintas de V. Si $T : V \to V$ es un isomorfismo indicar la opción correcta:

(A) ${}_{\mathcal{B}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{B}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{B}}(T \circ T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

(B) ${}_{\mathcal{B}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{A}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{B}}(T \circ T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

(C) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{A}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{B}}(T \circ T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

(D) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{B}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{A}}(T \circ T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}}$.

(E) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{B}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{A}}(T \circ T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Solución: Por propiedades de las matrices asociadas vistas en teórico tenemos que la opción correcta es: ${}_{\mathcal{B}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{B}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{B}}(T \circ T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$. (**A**).

Ejercicio 9.

Sean $\mathcal{A} = \{1, 1+x\}$ y $\mathcal{C} = \{1, x\}$ bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)x$$

Si $T^{-1} : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ es la inversa de T y ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}}$ es la matriz asociada a T^{-1} de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{A}$. Indicar la opción correcta:

(A) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(B) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(C) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(D) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(E) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución: ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = [{}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{A}}]^{-1}$.

$T(1) = 1 + 1 \Rightarrow \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}(T(1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T(1+x) = 1 + 2x \Rightarrow \operatorname{coord}_{\mathcal{C}}(T(1+x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow {}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{B}).$$

Ejercicio 10.

Sean $\mathcal{A} = \{(1,2),(1,-3)\}$ y $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, tales que la matriz cambio de base de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$ es

$${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Si $u = (2,-1)$ tiene por coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ el vector $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, los valores de a y b son:

(A) $a = -3$, $b = 2$.

(B) $a = 2$, $b = 1$.

(C) $a = -1$, $b = 0$.

(D) $a = 0$, $b = 1$.

(E) $a = -2$, $b = 3$.

Solución: Por propiedad de matriz cambio de base tenemos que: $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u) = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}} \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(u)$.

$(2,-1) = (1,2) + (1,-3) \Rightarrow \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ -2+b \end{pmatrix}.$$

Como $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se debe de cumplir que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ -2+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$ $(\mathbf{A})$.