Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Jueves 12 de diciembre de 2024

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de Identidad

Control	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										

La duración del examen es de tres horas y media.
Cada respuesta correcta suma 10 puntos.
Cada respuesta incorrecta resta 1,5 puntos.

Recordar que $\mathbb{R}_n[x]$ es el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes reales y I_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Ejercicio 1.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & b & 4 \\ 3 & c & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Indicar la opción correcta:

(A) Si $a = b = c$ entonces rango$(A) = 2$.

(B) Si $a = 2b$, $c = 3b$ entonces rango$(A) = 1$.

(C) Si $a = 0$, $b = c \neq 0$ entonces rango$(A) = 2$.

(D) Si $b = 2a$, $c = 3a$ entonces rango$(A) = 2$.

(E) rango$(A) = 3$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.

Sean la recta $r)\ (x,y,z) = (2,1,3) + \lambda(a,b,c)$ y el plano $\pi)\ ax + cy + bz = d$ con $a,b,c \in \mathbb{R}$. Si $r \parallel \pi$ entonces:

(A) $2a + 2b + 2c = 0$.

(B) $2a + b + 3c = 0$.

(C) $a = b = c$.

(D) $d = 0$.

(E) $a^2 = -2bc$.

Ejercicio 3

Sean $r)\ (x,y,z) = (0,1,2) + \lambda(1,-1,1)$ y $P = (-1,-1,1)$. Entonces la distancia del punto P a la recta r es:

(A) $d(P,r) = \sqrt{6}$.

(B) $d(P,r) = \sqrt{\frac{22}{3}}$.

(C) $d(P,r) = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

(D) $d(P,r) = \sqrt{\frac{22}{5}}$.

(E) $d(P,r) = \sqrt{\frac{18}{5}}$.

Ejercicio 4.

Sean $U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0, y - t = 0\right\}$ y $V = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z - t = 0\right\}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$ y $W = U + V$. Indicar la opción correcta:

(A) $W \neq U \oplus V$ y $\dim(W) = 2$.

(B) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 3$.

(C) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 4$.

(D) $W \neq U \oplus V$ y $\dim(W) = 3$.

(E) $W = U \oplus V$ y $\dim(W) = 2$.

Ejercicio 5.

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 y $\mathcal{B} = \left\{v_1, v_2, v_3\right\}$ una base de V. Se definen los siguientes subconjunto de V

$$\mathcal{A} = \left\{v_1 - v_3, v_1, v_1 + v_2, v_3\right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{2v_2, v_1 - v_2\right\}, \quad \mathcal{D} = \{v_1 + v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_3\}.$$

Indicar la opción correcta:

(A) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son LD y $\mathcal{D}$ es LI.

(B) $\mathcal{A}$ es LD, $\mathcal{D}$ es base y $\mathcal{C}$ es LI.

(C) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son LI y $\mathcal{C}$ es base.

(D) $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son LD y $\mathcal{A}$ es LI.

(E) $\mathcal{C}$ es LI y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son LD.

Ejercicio 6.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformación lineal tal que $N(T) = \left\{(x,y,z) : 2x + y - z = 0, y - z = 0\right\}$, $T(1,1,0) = (2,-1)$ y $T(0,0,1) = (1,1)$. Indicar la opción correcta:

(A) $T(1,-1,0) = (4,1)$.

(B) $T(1,-1,0) = (3,0)$.

(C) $T(1,-1,0) = (0,-2)$.

(D) $T(1,-1,0) = (0,2)$.

(E) $T(1,-1,0) = (2,-1)$.

Ejercicio 7.

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta:

(A) No existen valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

(B) Existe un único valor de a para el cual $\dim N(T) = 1$.

(C) Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\dim N(T) = 1$.

(D) Existen infinitos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

(E) Existen exactamente dos valores de a para los cuales $\dim N(T) = 1$.

Ejercicio 8.

Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases distintas de V. Si $T : V \to V$ es un isomorfismo indicar la opción correcta:

(A) ${}_{\mathcal{B}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{B}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{B}}(T \circ T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

(B) ${}_{\mathcal{B}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{A}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{B}}(T \circ T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

(C) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{A}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{B}}(T \circ T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

(D) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{B}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{A}}(T \circ T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}}$.

(E) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1} \circ T)_{\mathcal{B}} = I_n$ y ${}_{\mathcal{A}}(T \circ T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 9.

Sean $\mathcal{A} = \left\{1, 1+x\right\}$ y $\mathcal{C} = \left\{1, x\right\}$ bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ transformación lineal definida por

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)x$$

Si $T^{-1} : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ es la inversa de T y ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}}$ es la matriz asociada a T^{-1} de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{A}$. Indicar la opción correcta:

(A) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(B) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(C) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(D) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(E) ${}_{\mathcal{A}}(T^{-1})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10.

Sean $\mathcal{A} = \left\{(1,2), (1,-3)\right\}$ y $\mathcal{B} = \left\{u_1, u_2\right\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, tales que la matriz cambio de base de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$ es

$${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Si $u = (2,-1)$ tiene por coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ el vector $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, los valores de a y b son:

(A) $a = -3$, $b = 2$.

(B) $a = 2$, $b = 1$.

(C) $a = -1$, $b = 0$.

(D) $a = 0$, $b = 1$.

(E) $a = -2$, $b = 3$.