## Ejercicio 1:

a) $\cdot$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ acotada $\to$ $\exists M\in\mathbb{R}^+$ tq $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)|<M$.
En particular $f$ es Lipschitz.

- Consideramos el problema de Cauchy $\circledast\begin{cases}\dot{x}=f(x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$

Como $f$ está en hip. de Picard, el problema de Cauchy tiene única solución.

Por unicidad la solución se puede escribir como $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(x(s))\,ds$

Veamos que la soluc a $\circledast$ tiene como int. maximal a $\mathbb{R}$:

- Consideramos el compacto $K\subset\mathbb{R}^2$ dado por $K=[t_0-T,t_0+T]\times[x_0-MT,x_0+MT]$
Por teo. de escape de compactos la soluc de $\circledast$ debe intersectar $\partial K$. Si probamos que la soluc debe cortar los laterales del cuadrado $K$ ( ptos de la forma $(t_0-T,x)$ o $(t_0+T,x)$ con $x\in(x_0-MT,x_0+MT)$ ) obtenemos que la soluc está definida para $t\in[t_0-T,t_0+T]$ y como $T$ arbitrario el int. maximal será $\mathbb{R}$.

Asumiendo (por abs) que esto no sucede, $\exists\, t_*$ tq si $x(t)$ soluc de $\circledast$,

$x(t_*)=x_0-MT$ ó $x(t_*)=x_0+MT$. Asumimos lo segundo (si no es análogo)

Por otro lado $x(t_*)=x_0+\int_{t_0}^{t_*} f(x(s))\,ds < x_0+\int_{t_0}^{t_*} M\,ds = x_0+M(t_*-t_0) < x_0+MT$

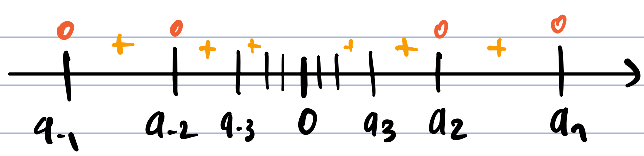
Es decir, $x(t_*)<x_0+MT$, llegando a un absurdo ↯

$\square$

b) $f(x)=\begin{cases}x^4\sin^2(1/x^2) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

- Tenemos que $f(x)=0$ si $x=0$ o si $\frac{1}{x^2}=n\pi$ con $n\in\mathbb{N}$

Es decir, $f(x)=0$ sii $x=0$ ó $x=\pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$. Llamemos $a_n=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$.
Observar que $a_n$ acumula en $x=0$.

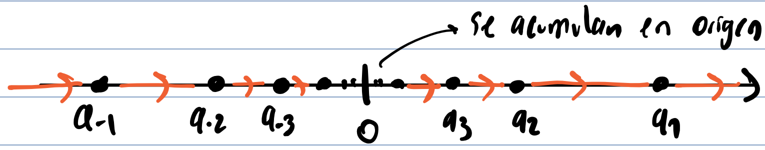
- El signo de $f(x)$ es 


(En particular los ceros de $f$ son mínimos relativos).

b) 1) f es de clase $C^1$ por lo cual está en las hipótesis del teo. de Picard.

( Si $x \neq 0$, $f'(x) = 4x^3 \sin^2(1/x^2) + x^4 \cdot \frac{(-2)}{x^3}\, 2\sin(1/x^2)\cos(1/x^2)$.
Dicha expresión se extiende continuamente en el origen, valiendo $0 = f'(0)$ ).

- Los ptos de equilibrio son $\{0\} \cup \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Diagrama de fase:




2) Ya vimos que f es de clase $C^1$.
Además f es acotada:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 \sin^2(1/x^2) \overset{\text{equiv}}{=} \lim_{x\to+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{x^4} = 1$$

De forma análoga $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Una función continua en $\mathbb{R}$ con límites finitos en $\pm\infty$ es acotada. ✓

Luego, por parte 1) del ejercicio, los int. maximales son $\mathbb{R}$.

3) $x=0$ es estable: Consideramos $I \subset (a_{-1}, a_1)$ entorno (intervalo) abierto que contenga a $x=0$.

Como $a_n$ acumula en $x=0$, $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $(a_{-n}, a_n) \subset I$.
Recordando que $x \equiv a_{-n}$ y $x \equiv a_n$ son soluc ctes, por unicidad de solución toda otra solución con condición inicial $x_0 \in (a_{-n}, a_n)$ deberá permanecer en este intervalo.
Por lo tanto $x=0$ es estable.

$x=0$ no es asint. estable: $x=0$ es acumulado por ptos de equilibrio, por lo tanto no puede ser asint. estable.

4) Asumimos (raz. por absurdo) que $\exists V$ de Lyapunov con mínimo estricto en $x=0$.

Como V de Lyapunov, $\dot{V}(x) \leq 0$, es decir, si $x(t)$ solución:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{dV}{dx}(x(t))\, \underbrace{x(t)^4 \cdot \sin^2(1/x^2(t))}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow \left[ \frac{dV}{dx}(x) \leq 0 \quad \forall x \right]$$

En particular V (definida en entorno de $x=0$) es decreciente.
Esto contradice que $x=0$ sea mínimo estricto ( $x=0$ mín estricto significa que $\forall \bar{x}$ en entorno de 0, $\bar{x} \neq 0$, $V(\bar{x}) > V(0)$ )

absurdo. ∎

En part. el recíproco del Teorema de Lyapunov (I) es falso, ya que la existencia de un pto de eq. estable no garantiza la existencia de funciones de Lyapunov.

## Ejercicio 2:

a) Considerando extensión impar de $\cos(x)$ y calc. serie de Fourier obtenemos

Si $n>1$: $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x).\mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(nx)\Big|_0^\pi} - n\int_0^\pi \mathrm{sen}(x)\cos(nx)\right]$

$= \frac{2n}{\pi}\left[\cos(x)\cos(nx)\Big|_0^\pi + n\int_0^\pi \cos(x).\mathrm{sen}(nx)\right]$

(Si $n=1$ $b_1=0$)

$= \frac{2n}{\pi}\left[(-1)^{n+1}-1\right] + n^2 b_n$

$\Rightarrow \quad b_n - n^2 b_n = \frac{2n}{\pi}\left((-1)^{n+1}-1\right) \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{2n}{\pi(1-n^2)}\left((-1)^{n+1}-1\right)$

Luego, por Teo de Dini la conv. de la serie de Fourier con $x\in(0,\pi)$ es puntual, obteniendo

$$\left[\cos(x) = \sum_{2}^{+\infty} \frac{2n}{\pi(1-n^2)}\left((-1)^{n+1}-1\right)\cos(nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{k}{4k^2-1}\right)\cos(2kx)\right]$$

b) Como el problema tiene condiciones de borde ctes, por ppio de superposición buscamos una soluc. como suma de soluciones de los sig. problemas:

$(*_1)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t)=1,\quad u(\pi,t)=-1 \\ u(x,0) = u_e(x) \end{cases}$ ↳ arbitraria

$(*_2)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0 \\ u(x,0) = \cos(x) - u_e(x) = u_0(x) \end{cases}$

- Para resolver $(*_1)$ buscamos solución estacionaria:

Esta es $\left[u_e(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}\right]$

- Luego resolvemos $(*_2)$ con método de Fourier (candidato):

$u_0(x) = \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi} = \sum_{1}^{+\infty} B_n.\mathrm{sen}(nx)$

y $\left[u_2(x,t) = \sum_{1}^{+\infty} B_n.\mathrm{sen}(nx)\,e^{-n^2 t}\right]$ es candidata a soluc de $(*_2)$.

donde $\begin{cases} B_n = \dfrac{2n}{\pi(1-n^2)}\left((-1)^{n+1}-1\right) - \dfrac{2}{\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right) + \dfrac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} & \text{si } n>1 \\ B_1 = \dfrac{4}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} = \dfrac{8}{\pi} \end{cases}$

Por lo tanto $u(x,t) = u_e(x) + u_2(x,t)$ es candidata a soluc. del problema planteado.