# Examen de Ecuaciones Diferenciales

Diciembre de 2024.

| No. parcial | Apellido y nombre | Firma | Cédula |
| --- | --- | --- | --- |
| | | | |

Duración del examen: 4 horas

**En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. Para la aprobación del examen se requiere resolver correctamente un ejercicio esencialmente completo.**

1. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1$ acotada. Probar que todas las soluciones de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ tienen intervalo maximal $\mathbb{R}$.

   *Sugerencia: si la condición inicial es $(t_0, x_0)$, considerar la ecuación integral $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds$, acotar y usar convenientemente el teorema de salida de compactos.*

   *b*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin^2(1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   y considere la ecuación $\dot{x} = f(x)$.

   1) Verificar que $f$ está en las hipótesis del teorema de Picard y hallar los puntos de equilibrio. Dibuje el diagrama de fase.
   2) Hallar intervalos maximales de las soluciones.
   3) Probar que $x = 0$ es estable pero no asintóticamente estable.
   4) Probar que no existe una función de Lyapunov con mínimo estricto en $x = 0$. Corrobore que esto prueba que el recíproco del teorema de Lyapunov (referido a la estabilidad) es falso.

2. *a*) Expresar la función $\cos(x)$ con $x \in (0, \pi)$ como una suma infinita de senos, explícitamente halle una sucesión de reales $b_n$ tales que

$$\forall x \in (0,\pi) \qquad cos(x) = \sum_{1}^{+\infty} b_n sen(nx)$$

   *b*) Halle un candidato a solución para el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 1 \text{ y } u(\pi,t) = -1 \quad \text{para todo } t > 0, \\ u(x,0) = \cos(x) \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi] \times (0,+\infty). \end{cases}$$

   *Sugerencia: Observar con detenimiento las condiciones de borde. Pueden ser de utlidad las siguientes igualdades para $x \in (0, \pi)$:*

   - $1 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + (-1)^{n+1}\right) \frac{\text{sen}(nx)}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}((2k+1)x)}{2k+1}$
   - $x = 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx)$