Aplicaciones de Álgebra Lineal

Segundo Parcial 2024

5/12/2024

Ejercicio 1 (P) (15 puntos)
Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$.

Demuestre que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a. A es normal.

b. A es unitariamente diagonalizable.

c. $\sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}^2| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$

Ejercicio 2 (25 puntos)

Se considera la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

a. Describa propiedades de P, y de $2.P$ según lo trabajado en el curso.

b. Determine si P es irreducible.

c. Halle los valores de s tales que P^s es irreducible.

d. ¿Cuál es el espectro de P?

e. Determine si P es primitiva.

f. Determine si P verifica las hipótesis del Teorema de Birkhoff-Vandercraft, y/o las hipótesis del Teorema de Markov. Justifique.

Ejercicio 3 (T) (20 puntos)
Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con $A \geq 0$.

a. Probar que $\rho(A + I) = \rho(A) + 1$.

b. Demostrar que si A es irreducible entonces $(A + I_n)^n > 0$.

c. Enunciar y demostrar el Teorema de Perron-Frobenius.
No es necesario demostrar el Teorema de Birkhoff-Vandercraft, ni tampoco el Teorema “light”de Perron-Frobenius.