Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables.**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Noviembre 2024.**

SEGUNDO PARCIAL – Viernes 29 de Noviembre de 2024

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El parcial dura 3 horas.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. Hay 5 ejercicios de múltiple opción de 5 puntos cada uno y 3 ejercicios de desarrollo. El parcial es de 60 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- Cada respuesta incorrecta en los ejercicios de múltiple opción resta 1 punto. Preguntas sin contestar suman 0 puntos. En cada ejercicio de múltiple opción hay una sola opción correcta.
- Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

EJERCICIOS DE MÚLTIPLE OPCIÓN
5 ejercicios, 25 puntos totales.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1.(5 pts.)

Se consideran las siguientes afirmaciones sobre conjuntos en $\mathbb{R}^n$:

(1) La unión de conjuntos abiertos es abierta.

(2) La unión de un número arbitrario de conjuntos cerrados es cerrado.

(3) La intersección de un número arbitrario de conjuntos abiertos es abierta.

(4) La intersección de conjuntos cerrados es cerrada.

(5) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en K, y K es un conjunto compacto, entonces existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ y además $x \in K$.

Indicar la opción correcta:

A) Solamente las opciones (1) y (4) son correctas.

B) Solamente las opciones (2) y (3) son correctas.

C) Solamente la opción (5) es correcta.

D) Todas las afirmaciones son correctas.

Ejercicio 2.(5 pts.) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(2x + y^2)$, y P el plano tangente al gráfico de f en el punto $(0, 0, 0)$:

Indicar la opción correcta:

A) $(0, 2, 2) \in P$.

B) $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2t,\ y = 0,\ z = -t,\ t \in \mathbb{R}\}$.

C) La ecuación del plano P es: $z = 2x \cos(2x + y^2)$.

D) $(1, 0, 2) \in P$.

Ejercicio 3.(5 pts.) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Entonces:

A) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

B) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{1}{4}$.

C) No existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

D) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 4.(5 pts.) Se consideran las funciones:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 & \text{y} & g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ f(x, y) = (x, y, x^2 + y^3) & & g(x, y, z) = (x, 1, e^z) \end{array}$$

Entonces, $\mathrm{d}(g \circ f)_{(1,1)}(1, 0)$ es:

A) $(1, 0, 2xe^{x^2+y^3})$.

B) $(1, 0, 1)$.

C) $(1, 0, 2xe^z)$.

D) $(1, 0, 2e^2)$.

Ejercicio 5.(5 pts.) Se considera

$$A = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x f(x, y)\, dy \right] dx,$$

donde se supone que existen todas las integrales que aparecen. Entonces:

A) La región de integración es el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ y $A = \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx \right] dy$.

B) La región de integración es el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ y $A = \int_0^1 \left[F(y) - F(y^2) \right] dy$, donde $F(y)$ es una primitiva de la función $f(0, y)$.

C) La región de integración es $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\}$ y $A = \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx \right] dy$.

D) La región de integración es $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\}$ y $A = \int_0^1 \left[F(y) - F(y^2) \right] dy$, donde $F(y)$ es una primitiva de la función $f(1, y)$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO
3 ejercicios, 35 puntos totales.

Ejercicio 1 (15 pts.) Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \ \forall y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(1) Probar que f no es continua en $(0,0)$.

(2) Estudiar la existencia de $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$.

Ejercicio 2 (10 pts.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en el punto a.

Ejercicio 3 (10 pts.) Calcular $\iint_R xy(x+y)\,dx\,dy$, donde $R = [0,1] \times [0,1]$.