1) a) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \end{cases}$

Si buscamos soluc de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ obtenemos que necesariamente:

$$\left[u(x,t) = b_n \operatorname{sen}(nx) \cdot e^{-n^2 t} \right], \quad b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

(Justificación, que debe estar en la prueba, la encuentran en notas de teórico)

Pero ojo, con ese candidato $u_0(x) = b_n \operatorname{sen}(nx)$. De no ser esta la condición inicial, si es suma finita de $b_n \operatorname{sen}(nx)$ consideramos suma finita de candidatos. De no ser así, el candidato se intenta expresar como suma infinita de u_n

b) (*) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = 3\operatorname{sen}(2x) - 4\operatorname{sen}(7x) + x \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \pi \end{cases}$ $\longrightarrow$ bordes de barra a temp. cte, pero no ambas nulas.

Consideramos los sig problemas:

(I) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = x \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \pi \end{cases}$ (II) $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = 3\operatorname{sen}(2x) - 4\operatorname{sen}(7x) \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \end{cases}$

- El problema (I) tiene solución estacionaria $u_e(x,t) = x$ $(x \in [0,\pi])$ (trivialmente es soluc. de (I))
- El problema (II) tiene solución de la forma $u_{II}(x,t) = 3\operatorname{sen}(2x)e^{-2^2 t} - 4\operatorname{sen}(7x)e^{-7^2 t}$

Siendo la suma de dos soluc de variables separables (basta corroborar que la suma finita de soluc con bordes nulos es soluc con bordes nulos)

Se verifica que $u(x,t) = u_e(x,t) + u_{II}(x,t)$ es solución de (*)

2) $\begin{cases} \dot{\varphi} = \theta \\ \dot{\theta} = -\operatorname{sen}(\varphi) - \theta \end{cases}$

a) $(\dot{\varphi},\dot{\theta}) = (\theta, -\operatorname{sen}(\varphi) - \theta) = (0,0)$ sii $\theta = 0$, $\varphi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) $E(\varphi,\theta) = \dfrac{\theta^2}{2} - \cos(\varphi) \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(E(\varphi(t),\theta(t))\right) = \nabla E(\varphi(t),\theta(t)) \cdot (\dot{\varphi}(t),\dot{\theta}(t))$

$= (\operatorname{sen}(\varphi), \theta) \cdot (\theta, -\operatorname{sen}(\varphi) - \theta)$

$= -\theta^2 \leq 0.$] ojo, no es estricta, pues $=0$ para los ptos $(0,\varphi)$.

Además $(0,0)$ es mínimo:

$$E(\varphi,\theta) - E(0,0) = \underbrace{\frac{\theta^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \cos(\varphi))}_{\geq 0} \geq 0 \quad \forall (\varphi,\theta)$$

c) • La linealización en (0,0) es: $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}) = (\theta, -\varphi - \theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, pol car: $(-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1 \rightarrow$ raíces: $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

La parte real de las raíces es $-1/2 < 0$, por lo tanto, por Teorema H-G, el punto de eq. es asintóticamente estable

• La linealización en $(\pi, 0)$ es: $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}) = (\theta, -\cos(\pi)\cdot\varphi - \theta)$

$= (\theta, \varphi - \theta)$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

Si $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, pol car: $(-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 + \lambda - 1 \rightarrow$ raíces: $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como una raíz es positiva y la otra negativa, por teorema H-G el pto de eq. es inestable, específicamente un pto silla.

* Los críticos de la forma $(2n\pi, 0)$ son equiv a $(0,0)$
Los críticos de la forma $((2n+1)\pi, 0)$ son equiv a $(\pi, 0)$.

d) • Como E es de Lyapunov, tenemos que (0,0) es estable. Sin embargo como la función de Lyapunov no es estricta, no podemos afirmar (ni negar) la estabilidad asintótica.

• Por otro lado, por Teo H-G la linealización permite afirmar que efectivamente (0,0) es asintóticamente estable.

No hay contradicción, simplemente la linealización da información más precisa.