

Segundo parcial de Ecuaciones Diferenciales.

22 de noviembre de 2024.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados. El parcial tiene una duración de tres horas y media.

1. Se denomina problema de *Cauchy-Dirichlet* al que sigue:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

- a) Encontrar candidatas a soluciones del problema del problema de *Cauchy-Dirichlet* usando el procedimiento de separación de variables. Justificar todos los pasos.
- b) Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = 3 \sin(2x) - 4 \sin(7x) + x, & x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = 0; u(\pi, t) = \pi, & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Encontrar una solución y verificar que lo es.

2. La siguiente ecuación modela un péndulo amortiguado:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \theta \\ \dot{\theta} = -\sin \varphi - \theta \end{cases}$$

- a) Encontrar los puntos de equilibrio.
- b) Probar que la función energía $e(\varphi, \theta) = \theta^2/2 - \cos \varphi$ es una función de Lyapunov no estricta en $(0, 0)$. Concluya el tipo de estabilidad en $(0, 0)$.
- c) Estudiar la linealización en todos los puntos de equilibrios y estudiar la estabilidad en ellos.
- d) En las partes anteriores se obtuvo el tipo de estabilidad en $(0, 0)$. Se genera alguna contradicción? Justificar la respuesta.