SEGUNDO PARCIAL de CDIV - Segundo semestre 2024 - Versión 1

Jueves **28** de noviembre de 2024

Nro de lista	Cédula	Apellido y nombre	Firma

- El puntaje total es 60 puntos.
- La duración del parcial es de 3 horas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Se debe entregar la hoja de escáner y las hojas de la propuesta con todos los campos completos.**
- Al completar los campos en la hoja de escáner, pintar (con lapicera) correctamente dentro de los círculos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Respuestas

Puntajes: 6 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E ó F** según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
B	E	D	F	A	B	B	A	C	C

Notación:

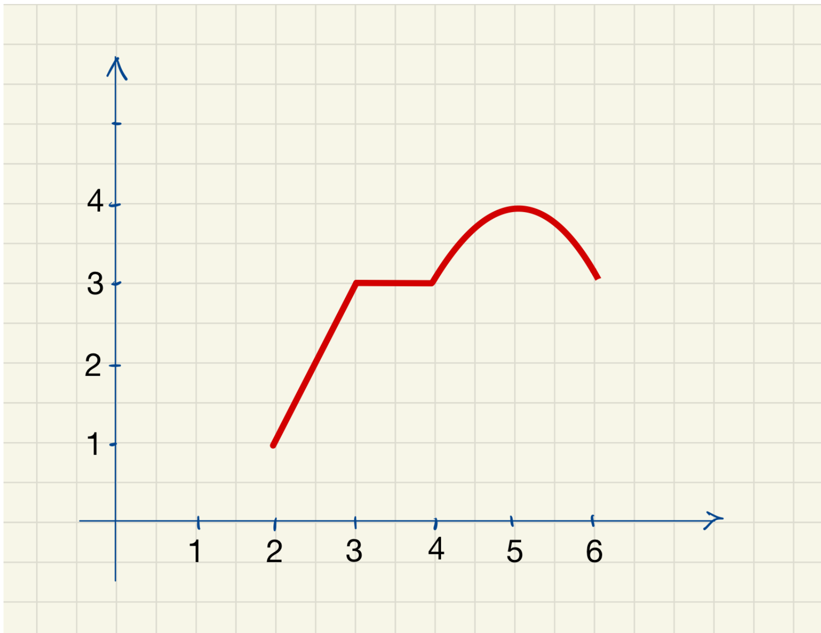
En el parcial se usa la siguiente notación:

- f' denota la derivada primera de f y f'' la derivada segunda de f.
- $p_n(f,a)(x)$ denota el polinomio de Taylor de orden n de la función f alrededor del punto a.

página en blanco

Ejercicio 1

Sea $f : [2, 6] \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f(2) = 0$ y tal que el gráfico de su derivada f' se da en la siguiente imagen.



Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) $f(6) > 13$.
B) f restringida al intervalo $[5, 6]$ es creciente.
C) Existen $x, y \in [2, 3]$ tales que $f(x) = f(y)$.
D) $f(6) = 12$.
E) f es decreciente.
F) No existe $x \in [4, 6]$ tal que $f''(x) = 0$.

Ejercicio 2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por la siguiente fórmula:

$$f(x) = \log(2x^2)e^{x^3+1}$$

Entonces $f'(1)$ vale:

A) $e^2 \log(2)$
B) $3e^2 + 2$
C) $e^2(\log(2) + \frac{1}{2})$
D) $e^2(2\log(2) + 1)$
E) $e^2(3\log(2) + 2)$
F) $e^2(3\log(2) + \frac{1}{4})$

Ejercicio 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que sabemos que es derivable en el punto $x = 2$ y cuya recta tangente por el punto $(2, f(2))$ tiene la ecuación

$$\boxed{y = 6x - 4}$$

Indicar la opción correcta.

A) $f(2) = 4$ y $f'(2) = -6$.
C) $f(2) = 6$ y $f'(2) = \frac{1}{6}$.
E) $f(2) = 8$ y $f'(2) = \frac{1}{6}$.
B) $f(2) = 6$ y $f'(2) = 8$.
D) $f(2) = 8$ y $f'(2) = 6$.
F) $f(2) = 8$ y $f'(2) = -6$.

Ejercicio 4

Sea $p_3(f, 0)(x)$ el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = a\sin(2x)$ en el punto 0. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique la siguiente igualdad:

$$p_3(f, 0)(1) = 2$$

A) $a = \frac{3}{2}$
C) $a = 2$
E) $a = \frac{4}{3}$
B) $a = \frac{6}{5}$
D) $a = 5$
F) $a = 3$

Ejercicio 5

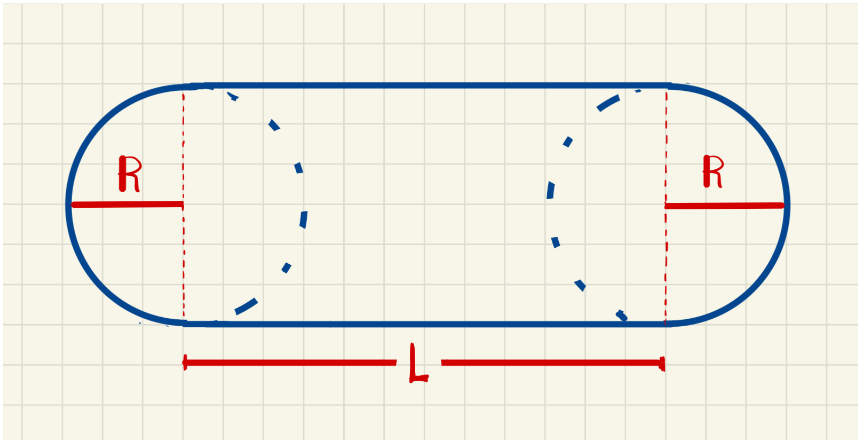
Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} e^{\sqrt{t}} dt$.

Entonces el límite $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{F(x)}{x - 1}$

A) existe y es igual a $2e$
B) existe y es igual a 0
C) existe y es igual a e
D) no existe
E) existe y es igual a $+\infty$
F) existe y es igual a $\frac{1}{2}e$

Ejercicio 6

Se desea construir una mesa de cristal con la siguiente forma:



El precio del cristal a medida con forma rectangular es de 90 dólares el metro cuadrado y el precio del cristal a medida con forma circular viene dado por la función $C(R) = 150R^2$. (Es decir que un círculo de cristal de radio 1 metro va a costar 150 dólares).

Se quiere que la mesa tenga una superficie total de 6 metros cuadrados y que $1 \leq R \leq 2$.

Indicar el valor de la medida L (en metros) de forma que el costo de la mesa sea mínimo.

A) $L = \frac{1}{5}$
B) $L = \frac{3-2\pi}{2}$
C) $L = \frac{1}{4}$
D) $L = \frac{6-\pi}{2}$
E) $L = \frac{2}{3}$
F) $L = \frac{1}{2}$

Ejercicio 7

La integral $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x}{\sqrt{1+2x}} \mathrm{d}x$ vale:

A) $-\frac{2}{3}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $-\frac{3}{16}$
D) $\frac{3}{4}$
E) $-\frac{3}{4}$
F) $\frac{3}{16}$

Ejercicio 8

La integral $\displaystyle\int_1^{2} x^2 \log(x) \mathrm{d}x$ vale:

A) $\frac{8}{3}\log(2) - \frac{7}{9}$
B) $\frac{8}{3}\log(2) - 3$
C) $\frac{8}{3}\log(2) - \frac{8}{9}$
D) $\frac{8}{3}\log(2) - \frac{10}{9}$
E) $4\log(2) - 2$
F) $4\log(2)$

Ejercicio 9

La integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x+3}{x^2+4}\mathrm{d}x$ vale:

A) $\frac{5}{2}\log(\frac{5}{4}) + 3\arctan(1)$
B) $5\log(\frac{5}{4}) + 3\arctan(1)$
C) $\frac{5}{2}\log(\frac{5}{4}) + \frac{3}{2}\arctan(\frac{1}{2})$
D) $\frac{3}{2}\arctan(\frac{1}{2})$
E) $\frac{5}{2}\log(\frac{5}{4})$
F) $\frac{3}{2}\arctan(1)$

Ejercicio 10

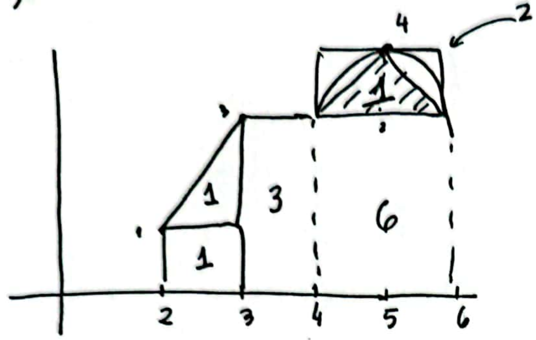
Sea $p_n(f,0)(x)$ el polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x) = \sin(x)$ alrededor de 0. ¿Cuál es el mínimo n para el cual podemos afirmar que $|\sin(1) - p_n(f,0)(1)| < \frac{1}{10}$?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5
F) 6

RESOLUCIÓN DE LA VERSIÓN 1:

Ejercicio 1:

$f: [2,6] \to \mathbb{R} / f(x) = \int_2^x f'(t)\,dt$ siendo f' la indicada en el gráfico:



Af: (A) "$f(6) > 13$": $f(6) = \int_2^6 f'(t)\,dt$ = área debajo del gráfico

$1+1+3+6+1 \leq \int_2^6 f'(t)\,dt < \underbrace{1+1+3+6+2}_{13} \Rightarrow$ no puede ser $f(6)>13$ $\boxed{X}$

(B) f' es >0 en $[5,6] \Rightarrow f$ es $\nearrow$ es $[5,6]$ $\boxed{✓}$

(C) "Existen $x, y \in [2,3]$ tales que $f(x)=f(y)$"

Como $f'>0$ en $[2,3] \Rightarrow f$ es est. $\nearrow$ en $[2,3] \Rightarrow \boxed{X}$

(D) "$f(6) = 12$": Por la misma cuenta que en (A),

$f(6) = \int_2^6 f'(t)\,dt \geq 1+1+3+6+1 = 12$ $\boxed{X}$

(E) "f es $\searrow$": Como $f'>0$, no puede ser $f \searrow$ $\boxed{X}$

(F) "No existe $x \in [4,6]$ tal que $f''(x)=0$": $\boxed{X}$ pues $f''(5)=0$.

Ejercicio 2:

$$f(x)= \log(2x^2)e^{x^3+1}$$

$$f'(x) = (\log(2x^2))' e^{x^3+1} + \log(2x^2) (e^{x^3+1})'$$

$$= \frac{4x}{2x^2} e^{x^3+1} + \log(2x^2) e^{x^3+1} 3x^2$$

$$= e^{x^3+1} \left(\frac{2}{x} + 3x^2 \log(2x^2)\right)$$

$$f'(1) = e^{1+1} \left(\frac{2}{1} + 3.1^2 \log(2.1)\right) = e^2(2+3\log 2) \quad E$$

Ejercicio 3

Ec. de la recta tangente al gráfico de f en $(2, f(2))$:

$$y= f(2) + f'(2)(x-2) \iff$$

$$\left.\begin{array}{l} y = f(2) - 2f'(2) + f'(2)x \\ \\ y = 6x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tiene qe ser} \begin{cases} f'(2) = 6 \\ f(2)-2f'(2) = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(2)=6 \\ f(2)-2.6=-4 \Rightarrow f(2) = -4+12 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2)=8 \\ f'(2)=6 \end{cases} \quad D$$

Ejercicio 4:

$f(x) = a\,sen(2x)$

$$P_3(f,0)(x) = \overset{=0}{f(0)} + \overset{=2a}{f'(0)}\,x + \frac{\overset{=0}{f''(0)}}{2!}x^2 + \frac{\overset{-8a}{f'''(0)}}{3!}x^3$$

- $f(0) = a\,sen(0) = 0$
- $f'(x) = 2a\cos(2x) \Rightarrow f'(0) = 2a\cos(0) = 2a$
- $f''(x) = -4a\,sen(2x) \Rightarrow f''(0) = -4a\,sen(0) = 0$
- $f'''(x) = -8a\cos(2x) \Rightarrow f'''(0) = -8a\cos(0) = -8a$

Luego,

$$\left. P_3(f,0)(1) = 2a - \frac{\overset{4\times\cancel{2}}{8a}}{3\times\cancel{2}} = 2a - \frac{4a}{3} = 2a\left(1-\frac{2}{3}\right) = 2a\,\frac{1}{3} \right\} \Rightarrow$$

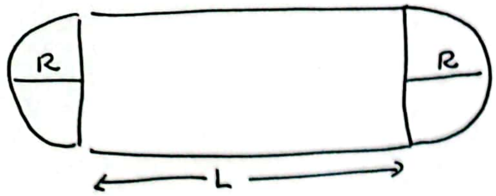
$$P_3(f,0)(1) = 2$$

$$2a\,\frac{1}{3} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{3} = 1 \Leftrightarrow \boxed{a=3} \qquad F$$

Ejercicio 5:

$$\lim_{x\to1} \frac{F(x)}{x-1} \underset{\text{L'Hopital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to1} \frac{e^{\sqrt{x^2}}\,2x}{1} = e^{\sqrt{1}}\cdot 2\cdot 1 = 2e \qquad A$$

Ejercicio 6 :



Costo mesa = Costo rectángulo + $\underbrace{\text{Costo medio círculo + Costo medio círculo}}_{\text{costo círculo}}$

$= 90 \times \text{Área rectángulo} + 150\, R^2$

$= 90 \times L \times 2R + 150\, R^2$

Restricciones: $*\ 1 \leq R \leq 2$ (no puede ser solo el rectángulo)

$*$ Área mesa $= L \times 2R + \pi R^2 = 6 \iff$

$$\boxed{L = \frac{6 - \pi R^2}{2R}}$$

Luego, $C(R) = 90 \times L \times 2R + 150\, R^2$

$= 90 \times \frac{(6 - \pi R^2)}{\cancel{2R}} \times \cancel{2R} + 150\, R^2$

$= 90 \times (6 - \pi R^2) + 150\, R^2$

$C'(R) = -180\pi R + 300\, R = \overbrace{(-180\pi + 300)}^{<0} R = 0 \iff R = 0$

(pero tiene que ser $1 \leq R \leq 2$). Luego en $[1,2]$ no hay p.c. para $C(R)$. Los otros candidatos son $R=1$ y $R=2$

sgn(C') + (0) − (1, 2)

$C(1) = 90\,(6 - \pi) + 150$

$C(2) = 90\,(6 - 4\pi) + 150 \times 4 < C(1)$

$\Rightarrow R = 2$ y $L = \frac{6 - \pi \times 4}{4} = \frac{3 - 2\pi}{2}$ B

Ejercicio 7:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \overset{C.V.}{\begin{bmatrix} u = 1+2x \\ x = \frac{u-1}{2} \\ dx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix}} = \int \frac{\frac{u-1}{2}}{\sqrt{u}}\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}(u-1)\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}.u - u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] = \frac{1}{\cancel{4}_2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} - u^{\frac{1}{2}}\right] \underset{D.C.}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}{3} - (1+2x)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{(\overbrace{1+\cancel{2}.\tfrac{3}{\cancel{2}}}^{4})^{\frac{3}{2}}}{3} - (1+2.\tfrac{3}{2})^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{3} - 1^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3} - 4^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{(\sqrt{4})^3}{3} - \sqrt{4}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3} - 2 + \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{8-6+2}{3}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

B

Escaneado con CamScanner

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Ejercicio 8:

$$\int_1^2 x^2 \log(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} f = \log x \longrightarrow f' = \frac{1}{x} \\ g' = x^2 \longrightarrow g = \frac{x^3}{3} \end{array}\right] = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3}\,dx$$

PARTES

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}$$

$$= \frac{x^3}{3}\left(\log x - \frac{1}{3}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{2^3}{3}\left(\log 2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\overset{0}{\overline{\log(1)}} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\log 2 \underbrace{- \frac{8}{9} + \frac{1}{9}}_{= -\frac{7}{9}} = \frac{8}{3}\log(2) - \frac{7}{9} \qquad \text{A}$$

Ejercicio 9:

$$\int_0^1 \frac{5x+3}{x^2+4}\,dx = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 3\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\log(x^2+4) + \frac{3}{2}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1$$

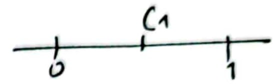
$$= \frac{5}{2}\log(5) + \frac{3}{2}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\log(4) + \frac{3}{2}\underbrace{\mathrm{Arctg}(0)}_{=0}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\underbrace{\left(\log(5) - \log(4)\right)}_{= \log\left(\frac{5}{4}\right)} + \frac{3}{2}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{C}$$

Ejercicio 10:

Sabemos qe si $f(x) = \text{sen}(x)$ y $R_n(f,0)(x) = f(x) - P_n(f,0)(x)$,

entonces $R_n(f,0)(x) = f^{(n+1)}(c_x) \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ con $c_x \in (0,x)$ ó $c_x \in (x,0)$.



Luego:

$|\text{sen}(1) - P_n(f,0)(1)| = |R_n(f,0)(1)| = \left| f^{(n+1)}(c_1) \dfrac{1^{n+1}}{(n+1)!} \right|$ con $0 < c_1 < 1$ (desconocido)

Como $f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} \pm \text{ sen}(x) \\ \pm \cos(x) \end{cases} \Longrightarrow |f^{(n+1)}(x)| \leq 1 \Longrightarrow$

$|R_n(f,0)(1)| = \dfrac{|f^{(n+1)}(c_1)|}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$

Luego, buscamos cuál es el primer $n \in \mathbb{N}$ para el cual podemos asegurar qe:

$|R_n(f,0)(1)| \leq \dfrac{1}{(n+1)!} < \dfrac{1}{10}$

n	$\frac{1}{(n+1)!}$	¿ $< \frac{1}{10}$?
1	$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$	x
2	$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$	x
3	$\frac{1}{4!} = \frac{1}{4 \times 6} = \frac{1}{24}$	✓

$\Longrightarrow$ el mínimo n es $\boxed{n=3}$

c