Solución del segundo parcial - 28/11/24

Ejercicio 1.

a) Definiendo $g(x) = x - f(x)/d$, basta con asegurar que $|g'(x)| < 1$ en un entorno de $x^* = \log 3$. Como f es suave, g también lo es y por lo tanto basta con que $|g'(x^*)| < 1$. Al ser

$$g'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)}{d} = 1 - \frac{e^{\log 3}}{d} = 1 - \frac{3}{d},$$

obervamos que d debe cumplir

$$-1 < 1 - \frac{3}{d} < 1.$$

Para la cumplir la segunda desigualdad, necesariamente debe ser $d > 0$. Por otro lado, la condición $-1 < 1 - 3/d$ implica $d > \frac{3}{2}$, por lo que la iteración es localmente convergente a x^* si y solo si $d > 3/2$.

b) Por el Teorema 4.7.4 de las notas de teórico, basta estudiar las derivadas de la función g definida previamente, evaluadas en $x^* = \log 3$. Como $g'(x^*) = 1 - \frac{3}{d}$, tenemos que $g'(x^*) \neq 0$ para todo $d \neq 3$. Por otro lado, si $d = 3$, se tiene que $g'(x^*) = 0$ y $g''(x^*) = -1 \neq 0$. El mismo teorema implica entonces que para todo $d \neq 3$ el orden de convergencia es uno, y que el orden de convergencia es dos si $d = 3$.

c) Lo que se pide es equivalente a probar que, para todo $x < \log 3$, se cumple $|g'(x)| < 1$. Como e^x es creciente, observamos que $e^x < e^{\log 3}$ para todo $x < \log 3$. Por lo tanto

$$g'(x) = 1 - \frac{e^x}{2} > 1 - \frac{e^{\log 3}}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} > -1 \quad \text{para todo } x < \log 3.$$

Para verificar la desigualdad $g'(x) < 1$, observamos que, como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 1 - \frac{e^x}{2} < 1.$$

Ejercicio 2.

a) Como $H = I - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$, vemos que

$$H\mathbf{u} = I\mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_2^2} = \mathbf{u} - 2\frac{\mathbf{u}\|\mathbf{u}\|_2^2}{\|\mathbf{u}\|_2^2} = \mathbf{u} - 2\mathbf{u} = -\mathbf{u}.$$

Por otra parte, si $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$, se cumple que $\mathbf{u}^t\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Entonces,

$$H\mathbf{v} = I\mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|_2^2} = \mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{u}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_2^2} = \mathbf{v}.$$

Como H es una transformación lineal que multiplica por -1 a todo vector en la dirección de $\mathbf{u}$ y deja invariante a todo vector ortogonal a $\mathbf{u}$, deducimos que H es la simetría con respecto al complemento ortogonal de $\mathbf{u}$. Esto es, $H(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2P_{\langle \mathbf{u} \rangle^\perp}(\mathbf{x})$.

b) Para escribir la factorización QR de la matriz se requieren tres transformaciones de Householder, una por cada columna (ver página 148 en las notas). Como las transformaciones de Householder son ortogonales, preservan la norma euclídea, y como la norma euclídea de la primer columna de A es 2, al aplicar la primera transformación de Householder H_1 debe quedar

$$A_2^{(1)} = (H_1 A)^{(1)} = \pm(2,0,0,0)^t.$$

Aquí, cualquiera de las dos elecciones es correcta.

Ejercicio 3.

a) La iteración del método de Euler hacia adelante está dada por

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k),$$

y por lo tanto una inspección directa del método `yFE` muestra que

$$f(t_k, y_k) = -10y_k - \operatorname{sen}(t_k).$$

Dado que el tiempo se inicializa en $t_0 = 0$ y la recurrencia inicia en $1 = y_0 = y(t_0)$, el problema de valores iniciales resulta

$$\begin{cases} y'(t) = -10y - \operatorname{sen}(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

b) Lo que se observa es un comportamiento típico de un problema rígido: la solución buscada varía lentamente pero está rodeada por soluciones que varían rápidamente. La columna de la derecha corresponde al método de Euler hacia adelante, y muestran que las soluciones numéricas son muy sensibles respecto al tamaño del paso h. Esto se debe a que es un método explícito y por lo tanto no puede ser incondicionalmente absolutamente estable, lo que sugiere que hay que tomar pasos muy pequeños si queremos hacer uso del mismo.

En cambio, la columna de la izquierda muestra un comportamiento estable respecto a h. Esa columna corresponde al método de Euler hacia atrás, que es incondicionalmente estable.

c) La iteración del método del trapecio es

$$y_{k+1} = y_k + h_k \left(\frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})}{2} \right),$$

por lo que usando la f de la parte a), obtenemos

$$y_{k+1} = y_k + h_k \left(\frac{-10y_k - \operatorname{sen}(t_k) - 10y_{k+1} - \operatorname{sen}(t_{k+1})}{2} \right).$$

Reordenando términos, esto también puede reescribirse como

$$y_{k+1} = \frac{1}{1+5h_k} \left(y_k(1-5h_k) - \frac{h_k}{2} \left(\operatorname{sen}(t_{k+1}) + \operatorname{sen}(t_k) \right) \right).$$

El método del trapecio es un método implícito, incondicionalmente absolutamente estable (a diferencia de FE que es condicionalmente absolutamente estable) y de segundo orden (a diferencia de BE y FE que son de primer orden).

d) Recordamos que la iteración del método de Euler implícito es

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Considerando el problema de valores iniciales,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

basta ver que el error local $\ell_k = y_{k+1} - u(t_{k+1})$ es de orden $\mathcal{O}(h_k^2)$, donde u es la solución al problema

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_k) = y_k. \end{cases}$$

Para esto, tomamos el siguiente desarrollo de Taylor de u alrededor de t_{k+1}, evaluado en t_k:

$$u(t_k) = u(t_{k+1}) - h_k u'(t_{k+1}) + \mathcal{O}(h_k^2).$$

Reordenando y usando las propiedades de u, obtenemos,

$$u(t_{k+1}) = y_k + h_k f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) + \mathcal{O}(h_k^2).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\ell_k\| = \|y_{k+1} - u(t_{k+1})\| &= \left\| y_{k+1} - \left(y_k + h_k f(t_{k+1}, u(t_{k+1}) + \mathcal{O}(h_k^2) \right) \right\| \\ &\leq \|y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1}) - y_k - h_k f(t_{k+1}, u(t_{k+1}))\| + \mathcal{O}(h_k^2) \\ &\leq h_k \|f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_{k+1}, u(t_{k+1}))\| + \mathcal{O}(h_k^2) \\ &\leq h_k L \|y_{k+1} - u(t_{k+1})\| + \mathcal{O}(h_k^2) \\ &\leq h_k L \|\ell_k\| + \mathcal{O}(h_k^2). \end{aligned}$$

Despejando, vemos que

$$\|\ell_k\| \leq \frac{1}{1 - h_k L} \mathcal{O}(h_k^2),$$

que es de orden $\mathcal{O}(h_k^2)$ para h_k suficientemente pequeño. Como el error de truncamiento local es de segundo orden, concluimos que el método de Euler hacia atrás es de primer orden.