Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

SEGUNDO PARCIAL – 28/11/24.

N° de parcial	Apellido y Nombre	Cédula

La prueba dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [12 puntos] El método de Newton para resolver la ecuación escalar $f(x) = 0$ requiere que evaluemos la derivada de f en cada iteración. Supongamos que reemplazamos el valor de la derivada por una constante $d \neq 0$, esto es, usamos el método iterativo

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{d}. \tag{1}$$

a) Sea $f(x) = e^x - 3$, cuya raíz es $x^* = \log 3$. Asumiendo que se inicializa la iteración suficientemente cerca de x^*, ¿para qué valores de d la iteración es convergente?

b) Para los valores de d hallados en la parte anterior, analizar el orden de convergencia de la iteración.

c) Se fija $d = 2$ en (1) y se toma como f a la función de la parte a). Demostrar que si se inicia la iteración con x^0 tal que $x^0 < \log 3$ entonces es convergente.

Ejercicio 2. [12 puntos]

a) Se escribe una transformación de Householder como $H = I - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^t}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$, donde $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz identidad y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector dado. Mostrar que $H\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ y que si $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$, entonces $H\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Describir la transformación lineal asociada a la matriz H.

b) Supongamos que se utilizan transformaciones de Householder para computar una factorización QR de la matriz

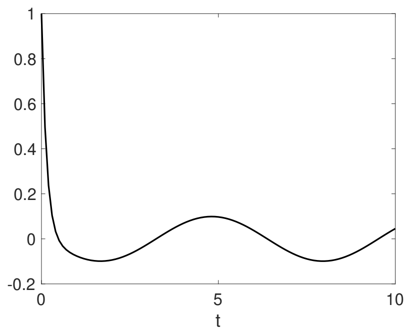
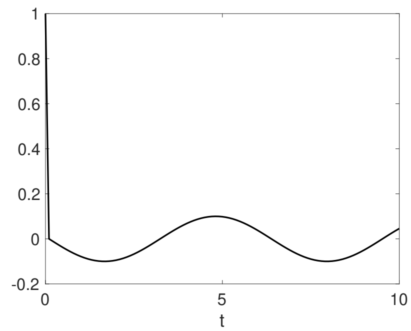
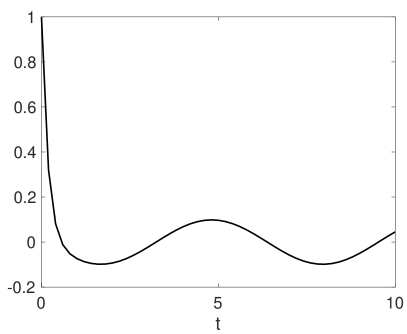
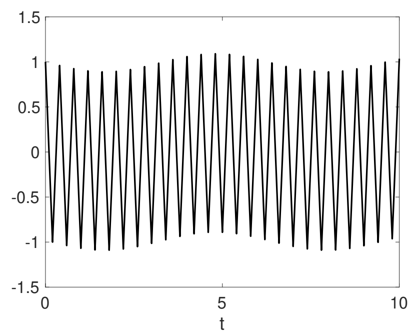
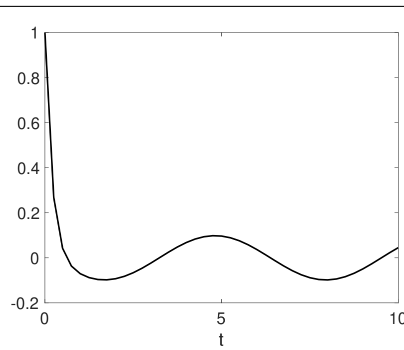
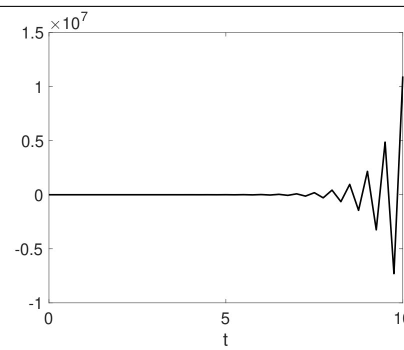
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

¿Cuántas transformaciones se requieren? Escribir cómo puede quedar la primer columna de A luego de aplicar la primera transformación.

Ejercicio 3. [16 puntos] Los métodos de Euler hacia adelante (FE) y de Euler hacia atrás (BE) con paso fijo $h_k = h$ son utilizados para aproximar la solución de un cierto problema de valores iniciales en el intervalo $[0, 10]$. Se escribe el siguiente código de Octave:

```
t = 0:h:10;
yFE(1) = 1;
yBE(1) = 1;
for k = 1:10/h
     yFE(k+1) = yFE(k) * (1-10*h) - h*sin(t(k));
     yBE(k+1) = (yBE(k) - h*sin(t(k+1))) ./ (1+10*h);
end
```

Al graficar los vectores `yFE` e `yBE` obtenidos con diferentes valores de h, se obtienen los siguientes gráficos.

$h = 0{,}1$		
$h = 0{,}2$		
$h = 0{,}25$		

a) ¿Cuál es el problema de valores iniciales que está siendo aproximado?

b) El gráfico muestra que uno de los métodos genera oscilaciones no acotadas, mientras que el otro no. Justificar por qué ocurre esto.

c) Se considera resolver el problema mediante el método del trapecio. Escribir la iteración y explicar qué ventajas tiene este método respecto a FE y a BE.

d) Demostrar que el método de Euler hacia atrás es de primer orden.