| N$^o$ de parcial | Cédula | Apellidos | Salón |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Respuestas**

| Conteste en estas columnas | | | | Deje estas columnas en blanco | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ej. 1 | Ej. 2 | Ej. 3 | Ej. 4 | Ej. 5 | Ej. 6 | Ej. 7 | Ej. 8 |
| | | | | | | | |

*** Importante ***

- El parcial dura 3 horas y es sobre un total de 60 puntos.
- Los ejercicios de desarrollo valen 9 puntos c/u, los de opción múltiple valen 6 puntos, -2 puntos y 0 puntos según la respuesta sea correcta, incorrecta o en blanco respectivamente.
- Utilice truncamiento si obtiene resultados con decimales.
- En cada ejercicio múltiple opción hay una sola opción correcta.

# Múltiple Opción (Total: 24 puntos)

**Ejercicio 1**

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathscr{U}[0,4]$. Sea $L$ el límite casi seguro de $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Entonces:

**(A)** $L = 1/4$, **(B)** $L = 3/4$, **(C)** $L = 3$, **(D)** $L = 16/3$.

**Solución:** Como $X_i \sim U(0,4)$, entonces $X_i = 4U$ con $U \sim \mathscr{U}(0,1)$ cuya varianza es $1/12$ de modo que $\mathrm{Var}(X_i) = 4^2 \times 1/12 = 4/3$. Por otro lado $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{cs} \mathbb{E}\left(X_i^2\right) = \mathrm{Var}(X_i) + (\mathbb{E}(X_i))^2 = 4/3 + 2^2 = 16/3$.

**Ejercicio 2**

Sea $X$ una V.A. absolutamente continua con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in [0,1], \\ 0 & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Si llamamos $\mu = \mathbb{E}(X)$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$, entonces:

**(A)** $\mu = 3/4$ y $\sigma^2 = 3/80$, **(C)** $\mu = 1/2$ y $\sigma^2 = 1/10$,

**(B)** $\mu = 3/4$ y $\sigma^2 = 3/5$, **(D)** $\mu = 3/2$ y $\sigma^2 = 3/80$.

**Solución:** $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x 3x^2 dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 3/4$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (3/4)^2 = \int_0^1 x^2 3x^2 dx - \frac{9}{16} = 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$.

**Ejercicio 3**

En un proceso industrial, se desea estimar la temperatura media del sistema. Se tomó una MAS de 36 mediciones de temperatura, obteniendo una media de 175 °C y una desviación estándar de 6 °C. Asumiendo que los datos siguen una distribución normal, un intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional es:

(**A**) $[171.08\,°C,\ 178.92\,°C]$, (**C**) $[174.34\,°C,\ 175.65\,°C]$,

(**B**) $[173.04\,°C,\ 176.96\,°C]$, (**D**) $[174.45\,°C,\ 175.54\,°C]$.

**Solución:** De las fórmulas vistas en el teórico tenemos que

$$I = 175 \pm 6\frac{z_{0.025}}{\sqrt{36}} = 175 \pm 1.96 = [173.04, 176.96].$$

**Ejercicio 4**

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_5$ i.i.d.$\sim$ $\exp(\lambda)$. Los valores observados son:

$$0.01, \quad 0.07, \quad 0.02, \quad 0.06, \quad 0.04.$$

La estimación $\hat{\lambda}$ de máxima verosimilitud para $\lambda$ es:

(**A**) $\hat{\lambda} = 5$, (**B**) $\hat{\lambda} = 1/5$, (**C**) $\hat{\lambda} = 25$, (**D**) $\hat{\lambda} = 1/25$.

**Solución:** Por lo visto en el práctico $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}_n = 25$.

## Ejercicios de Desarrollo (Total: 36 puntos)

*Explique y justifique los razonamientos empleados.*

**Ejercicio 5**

Para cada $\alpha > 0$, diremos que $X$ tiene distribución $D_\alpha$ sii $X$ es una V.A. absolutamente continua con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha^2\, x\, e^{-\alpha x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

a) Calcular la esperanza de $X$ en función de $\alpha$.
b) Hallar el estimador $\hat{\alpha}$ de $\alpha$ por el método de los momentos.
c) Si se realiza una observación de tres variables $X_1, X_2, X_3$ i.i.d $\sim D_\alpha$ y los valores observados son:

$$21.7, \quad 26.0, \quad 8.3.$$

Encuentre la estimación $\hat{\alpha}$ de $\alpha$.

**Solución:** a)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} f_X = \int_0^\infty \alpha^2 x^2 e^{-\alpha x} dx = \left[\alpha^2 x^2 \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \alpha^2 2x \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} dx$$

$$= -\left[\alpha^2 2x \frac{e^{-\alpha x}}{(-\alpha)^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2e^{-\alpha x} dx = \left[2\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^\infty = \frac{2}{\alpha}.$$

b)

$$\frac{2}{\hat{\alpha}} = \overline{X}_n \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{2}{\overline{X}_n}.$$

c) La estimación de $\alpha$ será $\hat{\alpha} = \dfrac{2 \times 3}{21.7 + 26.0 + 8.3} = \dfrac{3}{28}$

**Ejercicio 6**

Un fabricante de baterías afirma que sus baterías tienen una duración media de al menos 100 horas. Un cliente decide verificar esta afirmación y prueba 25 baterías, obteniendo una duración media de 97.2 horas con una desviación estándar de 7.5 horas. Asumiendo que la duración sigue una distribución normal, realice una prueba de hipótesis al nivel $\alpha = 0.05$ con $H_1 =$ "la duración media es menor a 100 horas" y decida si rechaza o no la afirmación del fabricante.

**Solución: Datos:**

- $H_0 : \mu \geq 100$ horas
- $H_1 : \mu < 100$ horas
- $n = 25$
- $\bar{x} = 97.2$ horas
- $s = 7.5$ horas
- $\alpha = 0.05$
- $t_{0.05,24} = 1.711$ (valor crítico)

¿Cuál es la conclusión correcta del test?

1. Identificamos que es una prueba unilateral izquierda para la media con varianza desconocida (usamos distribución t de Student)

2. Calculamos el estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$
$$t = \frac{97.2 - 100}{7.5/\sqrt{25}}$$
$$t = \frac{-2.8}{7.5/5}$$
$$t = -1.87$$

3. La región de rechazo es:

$$t < -t_{0.05,24} = -1.711$$

4. Como $-1.87 < -1.711$, el estadístico cae en la región de rechazo

Por lo tanto, se rechaza $H_0$ porque $t = -1.87 < -1.711$

**Conclusión:** Existe evidencia estadística suficiente para concluir que la duración media de las baterías es menor a 100 horas.

**Ejercicio 7**

Una computadora necesita un rango de temperaturas de entre 5 °C y 25 °C para funcionar correctamente. Se instala dicha computadora en un lugar donde la temperatura media es de 15 °C con una desviación estándar de 5 °C. Usando la desigualdad de Chebyshev encuentre $a$ tal que $P$(“la computadora funcione”) $\geq a$.

**Solución:** Para que la computadora funcione la temperatura $T$ deberá estar entre 5 y 25 grados. Por la desigualdad de Chebyshev, sabemos que

$$\mathbb{P}\left(|T-15|<10\right) \geq 1-\frac{5^2}{10^2}=\frac{3}{4}$$

**Ejercicio 8**

Se quiere estimar la proporción $p$ de de fumadores en Uruguay con una precisión de 0.01, esto es, que el verdadero valor $p$ se encuentre en el intervalo $I=[\hat{p}_n-0.01, \hat{p}_n+0.01]$ donde $\hat{p}_n$ es la proporción de fumadores en una muestra aleatoria de $n$ personas. Usando el TCL encuentre el menor $n \geq 30$, a partir del cual se puede asegurar que la probabilidad de que $I$ capture a $p$ es de al menos 90 %.

**Solución:** Claramente tenemos que si consideramos una variable Bernoulli $X_i$ por persona que valga 1 si es fumadora, entonces queremos calcular

$$\mathbb{P}\left(\hat{p}_n \in [p-0.01, p+0.01]\right) > 0.9.$$

O sea

$$\mathbb{P}\left(\frac{\hat{p}_n-p}{\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}}\sqrt{n} \in [-\varepsilon,\varepsilon]\right) > 0.9,$$

siendo $\varepsilon = 0.01\sqrt{n}/\sqrt{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}$. Por el TCL, dicha probabilidad anterior es aproximadamente igual a $\Phi(\varepsilon)-\Phi(-\varepsilon)=2\Phi(\varepsilon)-1$. Que será mayor a 0.9 sii $\Phi(\varepsilon) > (1+0.9)/2 = 0.95$, o sea $\varepsilon > z_{0.05} = 1.645$ o sea $n > 164.5^2\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)$ para cualesquiera $X_i$, de modo que $n$ deberá ser mayor al máximo de posibles valores de $x(1-x)$ con $x \in [0,1]$. Como $x(1-x)$ alcanza su máximo en $x=1/2$ y vale $1/4$, el mayor $n$ debe ser mayor a $164.5^2/4 = 6765.062$ de modo que $n$ debe ser mayor o igual a 6766.

Tabla de la función $\phi(z) = F_Z(z)$, siendo $Z$ con distribución N(0,1).

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7703 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

Tabla de la distribución T-Student con $r$ grados de libertad.

| | $P(T \leq t)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.60 | 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
| $r$ | $t_{0.40}(r)$ | $t_{0.25}(r)$ | $t_{0.10}(r)$ | $t_{0.05}(r)$ | $t_{0.025}(r)$ | $t_{0.01}(r)$ | $t_{0.005}(r)$ |
| 1 | 0.325 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 0.289 | 0.816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.277 | 0.765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.271 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.267 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.265 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.263 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 0.262 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 0.261 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 0.260 | 0.700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 0.260 | 0.697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 0.259 | 0.695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 0.259 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 0.258 | 0.692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.997 |
| 15 | 0.258 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 0.258 | 0.690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 0.257 | 0.689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 0.257 | 0.688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 0.257 | 0.688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 0.257 | 0.687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 0.257 | 0.686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 0.256 | 0.686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 0.256 | 0.685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 0.256 | 0.685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 0.256 | 0.684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 0.256 | 0.684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 0.256 | 0.684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 0.256 | 0.683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 0.256 | 0.683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 0.256 | 0.683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| $\infty$ | 0.253 | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |