Proposición: Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable y $f^{(n)}$ es continua. Supongamos además que $f^{(0)}(a) = f^{(1)}(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]} = 1$$

Es decir $f \sim \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ cuando $x \to a$

Prueba:

$$P_n(f,a) = \underbrace{f^{(0)}(a)}_{=0} + \underbrace{f^{(1)}(a)}_{=0}(x-a) + \dots\dots + \boxed{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{P_n(f,a) + R_n(f,a)}{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} =$$

$$\lim_{x \to a} \overbrace{\frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}}^{=1} + \frac{R_n(f,a)}{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} =$$

Por Teorema

0

$$= 1 + \lim_{x \to a} \frac{R_n(f,a)}{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} = 1$$

Taylor

Paréntesis: $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$

Entonces $P_m(Q,a) = \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k$ si $m \leq n$

$P_m(Q,a) = Q$ si $m > n$

Ej: $Q(x) = 1 + 3x - 5x^2 + 4x^3$

$$P_2(Q,0) = 1 + 3x - 5x^2$$

$(m \leq n)$

$$P_m(Q,a) = Q(a) + \frac{Q^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{Q^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = \left(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n\right)$$

$$Q(a) = a_0$$

$$Q'(x) = \left(a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n\right)' =$$

$$= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots + na_n(x-a)^{n-1}$$

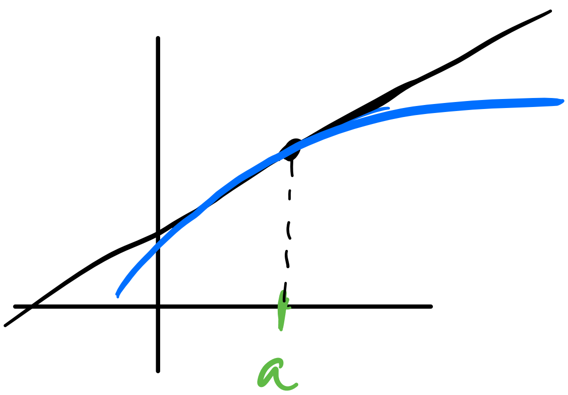
$$Q'(a) = a_1$$

Se puede ver que $Q^{(k)}(a) = k!\,a_k \quad (*) \qquad 0 \le k \le m$

Entonces $$P_m(Q,a) = \sum_{k=0}^{m} \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = $$

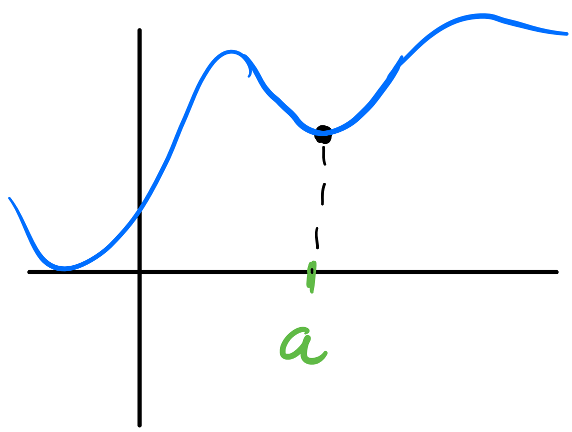
$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{m} \frac{k!\,a_k}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k$$

Aplicación a la clasificación de extremos relativos



$f'(a) \neq 0 \Rightarrow$ No hay un extremo relativo

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$ f presenta mínimo relativo en a

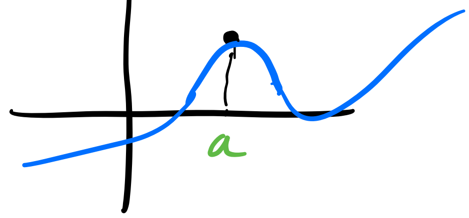


sg f' ? ? ? − − $\overset{0}{|}$ + + ? ? ?

a

$\{ f'(a) = 0$

$\left\{\begin{array}{l} f'(a)=0 \\ f''(a)<0 \end{array}\right. \Rightarrow$ f presenta un máximo relativo en a



Proposición: Sea $f: I \to \mathbb{R}$ n veces derivables con $f^{(n)}$ continua. y $a \in I$.

Supongamos además que

$$f^{(0)}(a) = f^{(1)}(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad y \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces:

Si n es impar $\Rightarrow$ f no presenta un extremo relativo en a

Si n es par $\Rightarrow$
- $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ presenta máximo relativo en a
- $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ presenta un mínimo relativo en a

Ejemplo: Si $f = x^4$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)} = 4!$$

$f'''' = 4$.

$\xRightarrow[\text{Proposición anterior}]{}$ f presenta un mínimo relativo en 0

Ejemplo:

$$f(x) = e^x - x - 2 + \cos(x) - \frac{x^3}{6}$$

Analizar si f presenta un extremo relativo en 0.

$$P_n(e^x, 0) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$P_n\left(-x-2-\frac{x^3}{6}, 0\right) = -x-2-\frac{x^3}{6} \quad \text{si } n \geq 3$$

$$P_{2n}(\cos(x), 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}$$

$$P_4(f, 0) = \left(P_4(e^x, 0)\right) + \left(P_4\left(-\frac{x^3}{6} - x - 2, 0\right)\right) + \left(P_4(\cos(x), 0)\right)$$

$$= \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(\cancel{\frac{-x^3}{6}}\right) \cancel{-x} \cancel{-2} + \left(\cancel{1} \cancel{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{24} = \frac{x^4}{12}$$

En este caso, la primer derivada que no se anula es la cuarta.

De hecho $f^{(4)}(0) = 2$

$$P_4(f,0) = x^4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 \Rightarrow \frac{f^{(4)}(0)}{24} = \frac{1}{12} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 2$$

Por la def. de Polinomio de Taylor

Y entonces, por la proposición anterior, como 4 es par y

$$f^{(4)}(0) > 0$$

Entonces f presenta un mínimo

relativo en O.