Recordamos la conclusión del Teorema de Taylor.

$$f(x) = P_n(f,a)(x) + R_n(f,a)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(f,a)}{(x-a)^n} = 0$$

Proposición: Sea $f: I \to \mathbb{R}$ n veces derivable; y $f^{(n)}$ continua; $a \in I$.
Entonces si Q es un polinomio de grado $\leq n$ que cumple $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0$

$$\Longrightarrow \quad Q = P_n(f,a)$$

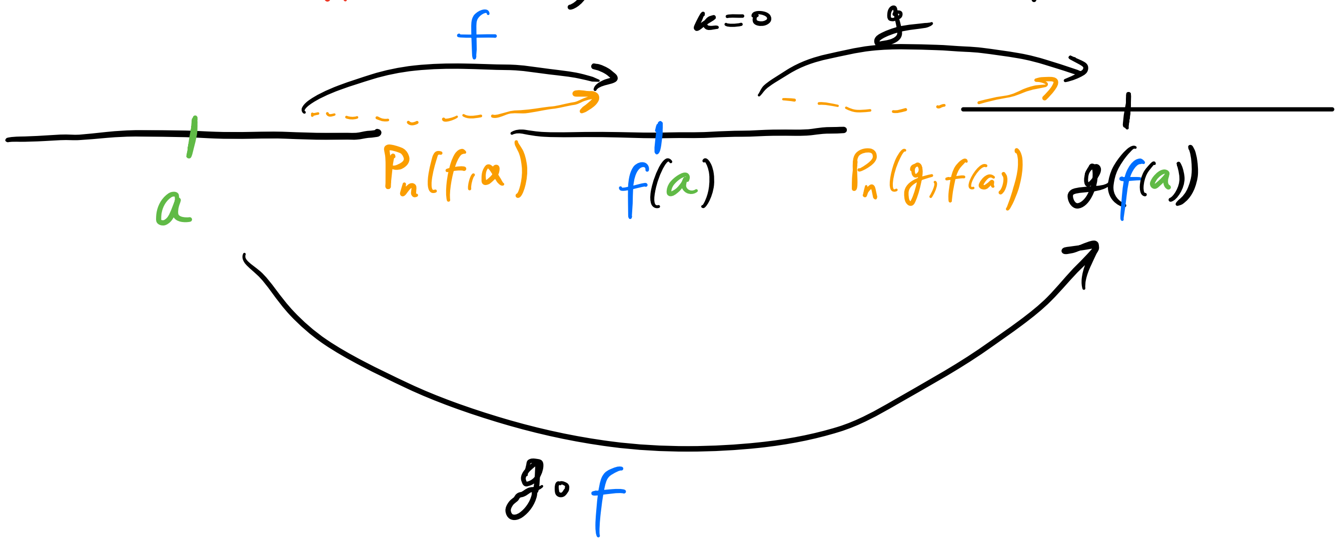
Propiedades: Sean $f,g: I \to \mathbb{R}$ n veces derivables y $f^{(n)}, g^{(n)}$ continuas; $a \in I$.
Entonces:

- $P_n(f+g, a) = P_n(f,a) + P_n(g,a)$ I
- $\left(P_{n+1}(f,a)\right)' = P_n(f',a)$ II
- Si $P_n(f,a) \cdot P_n(g,a) = \sum_{k=0}^{N} a_k (x-a)^k$

  entonces $P_n(f\cdot g, a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ III

- Si $P_n(g, f(a)) \circ P_n(f, a) = \sum_{k=0}^{N} a_k (x-a)^k$ IV

entonces $P_n(g \circ f, a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$



Ejemplos:

$$P_5(\text{sen}, 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Entonces $P_4(\text{sen}', 0) = \left(P_5(\text{sen}, 0)\right)' =$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} = \boxed{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}$$

Entonces:

$$P_4(\cos, 0) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

Ejemplo:

¿ $P_5((x^3+1).e^x, 0)$?

Si $gr\, Q = n$
entonces
$P_m(Q, a) = Q \quad \forall m \geq n$

$P_5(x^3+1, 0) = x^3+1$

$$P_5(x^3+1,0) = x^3+1$$

$$P_5(e^x,0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$P_5(x^3+1,0) . P_5(e^x,0) = (x^3+1)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) =$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^3 + \frac{x^4}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^7}{4!} + \frac{x^8}{5!} =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^3\left(\frac{1}{3!} + 1\right) + x^4\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{1!}\right) + x^5\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{2!}\right) + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^7}{4!} + \frac{x^8}{5!}$$

Entonces, por III,

$$P_5((x^3+1).e^x,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^3\left(\frac{1}{3!} + 1\right) + x^4\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{1!}\right) + x^5\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{2!}\right)$$

<u>Ejemplo</u>:

Si $P_n(g, f(a)) \circ P_n(f,a) = \sum_{k=0}^{N} a_k (x-a)^k$

entonces $P_n(g \circ f, a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ IV

$$P_5(e^{2x}, 0)$$

$e^{2x} = g \circ f$ donde $g = e^x$, $f = 2x$

$$P_5(g, f(0)) \circ P_5(f,0) = P_5(e^x, 0) \circ P_5(2x,0) =$$

$$P_5(e^x,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$P_5(2x,0) = 2x$$

$$P_5(e^x, 0) \circ P_5(2x,0) = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} =$$

$$= 1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^4x^4}{4!} + \frac{2^5x^5}{5!}$$

En este caso la composición ya tiene grado 5 por lo que no es necesario truncar y

$$P_5(e^{2x}, 0) = 1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^4x^4}{4!} + \frac{2^5x^5}{5!}$$

Aplicaciones para el cálculo de límites

Proposición: Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable y $f^{(n)}$ sea continua. Supongamos además que

$$f(a) = f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad y \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)} = 1$$

Observar que $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = P_n(f, a)$

Entonces la proposición se puede decir como que f es equivalente en a al $P_n(f, a)$ donde $f^{(n)}(a)$ es la primer derivada no nula.

$$\boxed{f \sim \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \quad \text{cuando} \quad x \to a}$$

<u>Ejemplo:</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\underbrace{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}_{\to 0}}{\underbrace{\operatorname{sen}(x) - x}_{\to 0}}$$

Buscamos un equivalente polinomial con el desarrollo de Taylor, tanto para el numerador como para el denominador

$$\begin{aligned}
e^x - 1 - x - \tfrac{x^2}{2} &= f \;; & f(0) &= 0 \\
e^x - 1 - x &= f' \;; & f'(0) &= 0 \\
e^x - 1 &= f'' \;; & f''(0) &= 0 \\
e^x &= f^{(3)} \;; & f^{(3)}(0) &= 1
\end{aligned}$$

Entonces, por la proposición anterior

$$f \sim \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 = \frac{x^3}{3!}$$

$$\operatorname{sen}(x) - x = g \; ; \quad g(0) = \operatorname{sen}(0) - 0 = 0$$

$$\cos(x) - 1 = g' \; ; \quad g'(0) = \cos(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$-\operatorname{sen}(x) = g'' \; ; \quad g''(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$$

$$-\cos(x) = g^{(3)} \; ; \quad g^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$$

Entonces, por la proposición anterior

$$g \sim \frac{g^{(3)}(0)}{3!} x^3 = \frac{-x^3}{3!}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{\operatorname{sen}(x) - x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(x^3/3!\right)}{\left(-x^3/3!\right)} = -1$$
