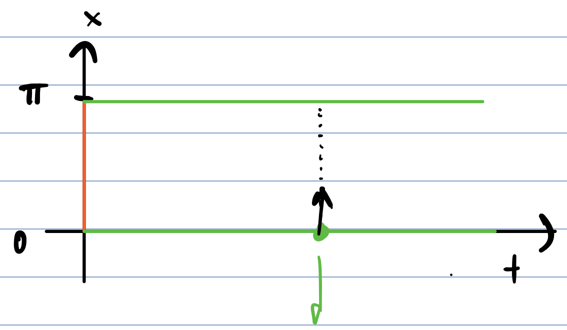
5)

- $u_t = u_{xx}$ ec. calor , $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty)$
- $u(x,0) = x$ temp inicial
- $u_x(0,t) = 0$ y $u_x(\pi,t) = 0$



en estos puntos conozco $u_x(0,t)$

Buscamos soluc con var sep:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Ec calor implica:

$$X(x) T'(t) = X''(x) \cdot T(t)$$

$$\to \left[\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu \text{ cte.} \right]$$

De la última ec obtenemos un sistema

$$\begin{cases} X'' - \mu X = 0 \\ T' - \mu T = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X'' - \mu X = 0 \\ T(t) = \text{cte} \cdot e^{\mu t} \end{cases}$$

Por mismo argumento que en ec. estudiada $\mu < 0$.

$$\to \begin{cases} X(x) = \text{cte}_1 \cos(\sqrt{-\mu} \cdot x) + \text{cte}_2 \cdot \text{sen}(\sqrt{-\mu} \cdot x) \\ T(t) = \text{cte } e^{\mu t} \end{cases}$$

Hasta ahora $u(x,t) = e^{\mu t} \left(a \cos(\sqrt{-\mu} \cdot x) + b \,\text{sen}(\sqrt{-\mu} \cdot x) \right)$ a,b ctes.

$$u_x(x,t) = X'(x) \cdot T(t) = e^{\mu t} \Big(\overbrace{-a \cdot \sqrt{-\mu}\, \text{sen}(\sqrt{-\mu} x) + b \cdot \sqrt{-\mu} \cdot \cos(\sqrt{-\mu} \cdot x)}^{X'(x)} \Big)$$

$\to$ $u_x(0,t) = 0 \;\; \forall t \in (0,+\infty)$ implica $X'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$\to$ $u_x(\pi,t) = 0 \;\; \forall t \in (0,+\infty)$ implica $X'(\pi) = 0$

$X'(\pi) = 0$ implica $-a \cdot (\sqrt{-\mu}) \cdot \text{sen}(\sqrt{-\mu} \cdot \pi) = 0$

entonces $\sqrt{-\mu} \cdot \pi = n\pi \Rightarrow \sqrt{-\mu} = n \in \mathbb{Z}$.

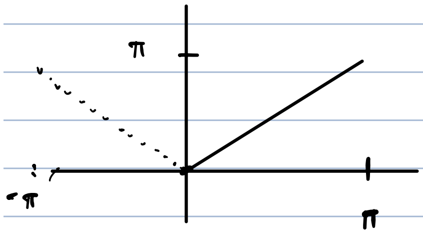
Pasando en limpio, la soluc con var sep y condiciones $u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t)$

es $\left[u(x,t) = a \cdot e^{-n^2 t} \cdot \cos(nx) \right]$

obs: $u(x,0) = a \cos(nx)$. Pero mi temp. inicial es $u(x,0) = x$.

Lo que resta es usar método de Fourier para escribir $x = \sum_{1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$

de forma tal de escribir la solución como suma inf. de soluc de var. sep.



En el pract sig. vamos a buscar una expresión en términos de cosenos para la extensión par de la función x.

De esta forma la soluc se expresa como $u(x,t) = \sum_{1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \cdot a_n \cos(nx)$

Donde los a_n son tales que $\sum_{1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = x$, $x \in [0,\pi]$.

trailer : $\left[a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx)\, dx \right]$