Práctico 8

1. Determinar cuáles de las siguientes sucesiones convergen puntualmente y uniformemente. Estudiar la continuidad de la función límite en cada caso.

   a) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{n}$ con $x \in \mathbb{R}$.

   b) $g_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.

   c) $h_n(x) = \dfrac{x}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.

   d) $i_n(x) = \dfrac{x}{(x+1)^n}$ con $x \in [1,2]$.

2. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones, discutiendo según los posibles dominios de definición.

   a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$.

   b) $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$.

   c) $f_n(x) = n^\alpha(1-x)x^n$ (discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$).

   d) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ $n \in \mathbb{N}$).

   e) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{n} \\ 1-nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1+nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \end{cases}$

3. *a*) Demostrar que la sucesión de funciones

   $$f_n : [0,1) \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n$$

   no converge uniformemente, pero si puntualmente.

   b) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(1) = 0$. Demostrar que la sucesión

   $$h_n : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad h_n(x) = g(x).x^n$$

   es uniformemente convergente.

4. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = x/n$ converge uniformemente en cualquier intervalo compacto. ¿Es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?

5. Consideremos la sucesión de funciones en $\mathbb{R}$

   $$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

   a) Calcular el límite puntual de las sucesiones f_n y f_n', a los que llamamos f y g respectivamente.

   b) Probar que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

   c) Estudiar en qué conjuntos $X \subset \mathbb{R}$ se tiene $f_n \rightrightarrows f$, y en qué conjuntos se tiene $f_n' \rightrightarrows g$.

6. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las series de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ cuando:

   a) $a_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$

   b) $a_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$

   c) $a_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

   d) $a_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1!}$

7. Consideramos la ecuación de ondas:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$$

Hallar solución con las sig. condiciones de contorno verificando que es una solución efectiva.

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = x(x-\pi) & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in [0,\infty) \end{cases}$$

Sugerencia: Revisar ejercicio 2 del práctico 6

8. Se considera la ecuación:

$$(*) \begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0 \text{ y } u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0, \\ u(x,0) = x \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi] \times (0,+\infty). \end{cases}$$

Hallar una candidata a solución, verificando que efectivamente lo es, de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Sugerencia: Revisar ejercicio 5 del práctico 6