"Polinomios en $(x-a)$" $a \in \mathbb{R}$

$3(x-1)^2 + (x-1) + 2$ es un polinomio en $(x-1)$

Cualquier polinomio se puede escribir en $(x-a)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

Ej: $x^2 + 3x - 5$

Queremos escribir ese polinomio en $(x-2)$

$$\boxed{x^2 + 3x - 5} = ((x-2)+2)^2 + 3((x-2)+2) - 5 =$$

$$= (x-2)^2 + 4(x-2) + 3(x-2) + 6 - 5 =$$

$$= \boxed{(x-2)^2 + 7(x-2) + 1}$$

"La derivada funciona igual"

$$x^n \overset{\text{derivamos}}{\rightsquigarrow} n x^{n-1} \rightsquigarrow n(n-1)x^{n-2} \rightsquigarrow n(n-1)(n-2)x^{n-3} \ldots$$

$$(x-a)^n \rightsquigarrow n(x-a)^{n-1} \rightsquigarrow n(n-1)x^{n-2} \rightsquigarrow \ldots$$

El polinomio de Taylor de orden n de f en a es:

$$\boxed{P_n(f,a)(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

cumple que es el <u>único</u> polinomio de grado menor o igual a n que tiene las mismas derivadas que f hasta orden n en a; es decir:

$$f^{(0)}(a) = P_n^{(0)}(f,a)(a)$$

$$f^{(1)}(a) = P_n^{(1)}(f,a)(a)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(f,a)(a)$$

<u>Ejemplos:</u> $f(x) = e^x$ calculemos el polinomio de Taylor de f en $x = 0$.

↳ también llamado el

polinomio de Mc Laurin de f

$$P_n(f,0) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\left.\begin{array}{l} f = e^x \\ f' = f^{(1)} = e^x \\ \vdots \\ f^{(n)} = e^x \end{array}\right\} \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Convención: $0! = 1$

$$\boxed{P_n(f,0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}$$

$$= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Ej: $P_3(f,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

Ej: $f = \operatorname{sen}(x)$

$$P_n(f,0) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$f = \operatorname{sen}(x)$	$\Rightarrow$	$f(0) = 0$
$f^{(1)} = \cos(x)$	$\Rightarrow$	$f^{(1)}(0) = 1$

$$f^{(2)} = -\operatorname{sen}(x) \Rightarrow f^{(2)}(0) = 0$$
$$f^{(3)} = -\cos(x) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$$
$$f^{(4)} = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)} = \cos(x)$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\boxed{P_5(f,0)(x)} = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \boxed{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$$

<u>Ejemplo</u>: $f = e^x$

$$P_n(f,1) = f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$f^{(k)} = e^x$$
$$f^{(k)}(1) = e^1 = e$$

$$P_n(f,1) = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{e}{n!}(x-1)^n$$

<u>Propiedad</u>:

SIGUE DIRECTO DE LA LINEALIDAD DE LAS DERIVADAS

$$\boxed{P_n(f+g,a) = P_n(f,a) + P_n(g,a)}$$

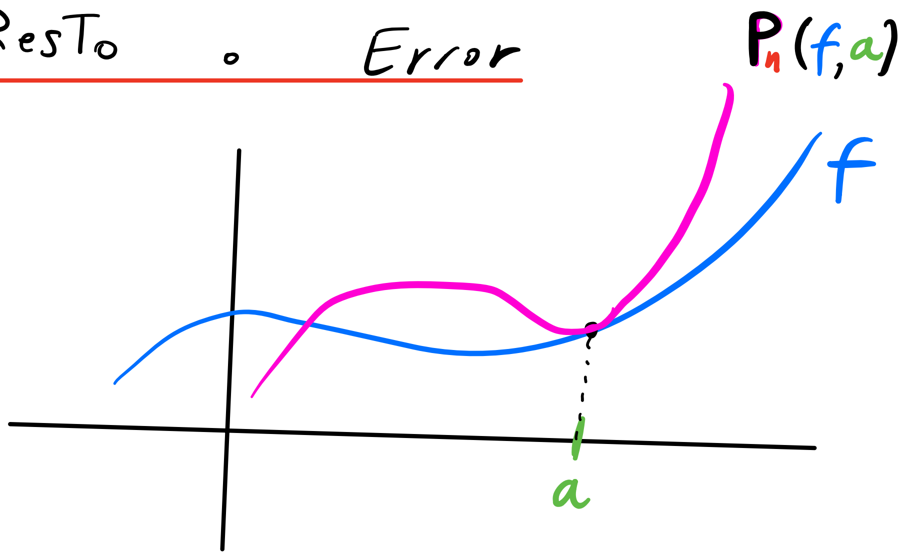
Ej: $f = e^x + \operatorname{sen}(x)$

$$P_4(f,0) = P_4(e^x,0) + P_4(\operatorname{sen}(x),0) =$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) =$$

$$= \boxed{1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$$

Resto o Error



Definimos $\boxed{R_n(f,a)(x) = f(x) - P_n(f,a)(x)}$

Observar que $f = P_n(f,a) + R_n(f,a)$

Observación 2

$$R_n(f,a)(a) = f(a) - P_n(f,a)(a) = 0$$

$$R_n^{(1)}(f,a)(a) = f^{(1)}(a) - P_n^{(1)}(f,a)(a) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R_n^{(n)}(f,a)(a) = f^{(n)}(a) - P_n^{(n)}(f,a)(a) = 0$$

Teorema de Taylor

Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable y tal que $f^{(n)}$ es continua; sea $a \in I$.

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0$$

" $R_n(f,a)$ es un infinitésimo de orden n en a "

Teorema 1 (Teorema de Taylor.)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función que es n veces derivable en un entorno de $a \in I$ y tal que $f^{(n)}$ es continua en a. Entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

es decir, el resto $R_n(f,a)$ es un infinitésimo de orden mayor que $x-a$.

Demostración.

Llamaremos R_n a $R_n(f,a)$. Como f es n veces derivable en un entorno de a y P_n es un polinomio, R_n también es n veces derivable en a y las derivadas $R_n^{(0)}$, $R_n^{(1)}$,…,$R_n^{(n-1)}$ son todas continuas. Por hipótesis, $f^{(n)}$ es continua en a, y por lo tanto también lo es $R_n^{(n)}$.

Usaremos la Regla de L'Hôpital para demostrar el teorema de Taylor. Recordemos la Observación 2 que nos dice que $R_n^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, \ldots, n$. Como las derivadas hasta orden n de R_n son continuas en a,

$$\lim_{x\to a} R_n^{(k)}(x) = R_n^{(k)}(a) = 0 \tag{1}$$

para $k \leq n$.

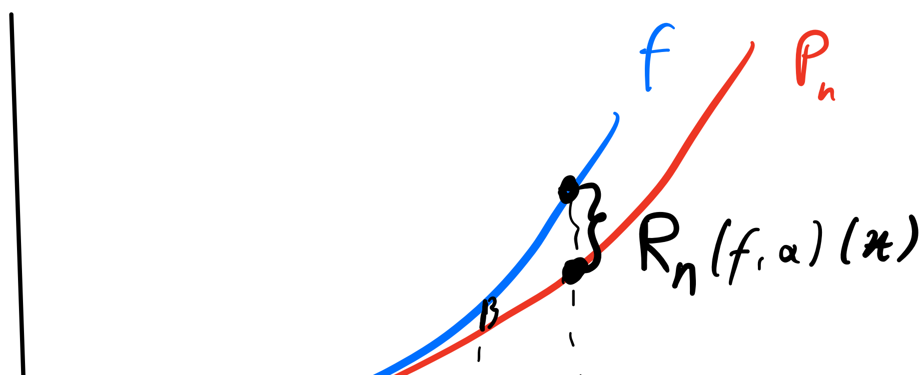
El límite que debemos calcular, que es

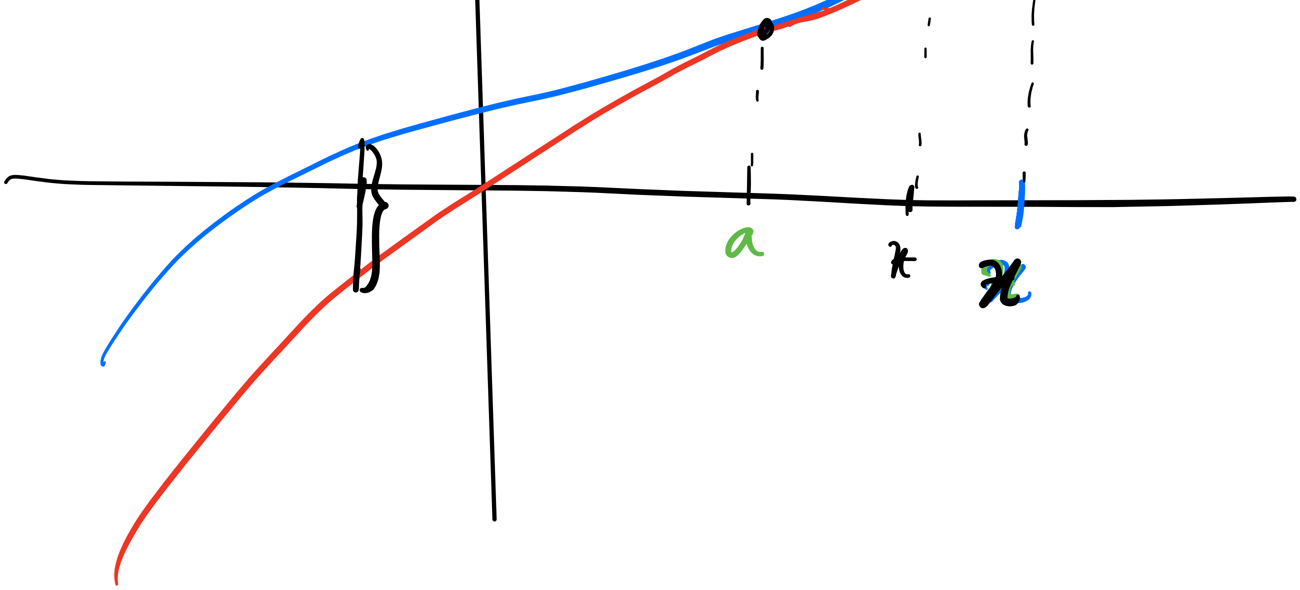
$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n},$$

es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, y le podemos aplicar la Regla de L'Hôpital. Al derivar una vez, dos veces,…, $n-1$ veces, seguimos teniendo una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Por lo tanto, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital n veces, al cabo de las cuales obtenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}.$$

Usando la ecuación (1) para $k = n$, llegamos a que este límite es 0.□




a
x
x