$$\int \frac{3x+5}{x^2+x+1}\,dx$$

x^2+x+1 no Tiene raices reales:
ya que el discriminante es $1^2-4.1.1=-3<0.$
En este caso decimos que x^2+x+1 <u>es irreducible</u>

<u>PASO I</u>:

Completar cuadrados en el denominador:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+1x+1 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+2.\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} = x^2+x+\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{x^2+x+1} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4} = \boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{3x+5}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$u = x+\frac{1}{2} \Rightarrow x = \boxed{u-\frac{1}{2}}$

$du = dx$

$$= \int \frac{3\left(u-\frac{1}{2}\right)+5}{u^2+\frac{3}{4}}\,du =$$

$$3\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du + \frac{7}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = (*)$$

$$\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du \underset{\substack{v=u^2+\frac{3}{4}\\ dv=2u\,du}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(|v|) \underset{DCV}{=} \boxed{\frac{1}{2}\log\left(\left|u^2+\frac{3}{4}\right|\right)}$$

$$\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{u^2}{3/4}+1\right)}\,du =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\sqrt{3/4}\int \frac{1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3/4}}\right)du}{\left(\frac{u}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1} \underset{\substack{v=\frac{u}{\sqrt{3/4}}\\ dv=\frac{1}{\sqrt{3/4}}du}}{=} \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\int \frac{dv}{v^2+1} =$$

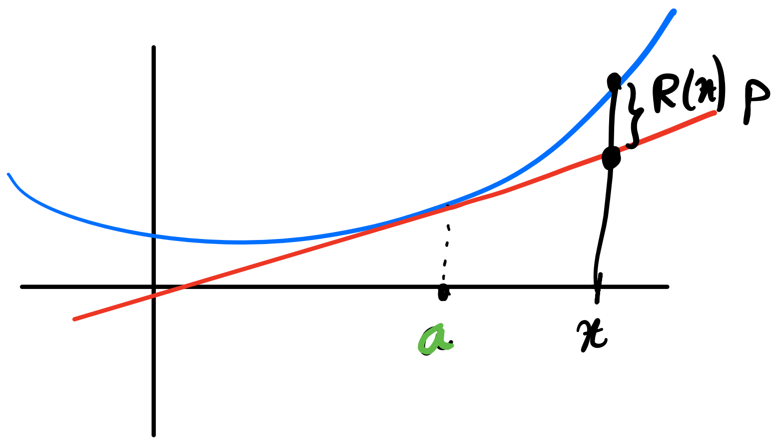
$$= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\operatorname{arctg}(v) \underset{DCV}{=} \boxed{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3/4}}\right)}$$

$$(*) = 3\cdot\frac{1}{2}\log\left(\left|u^2+\frac{3}{4}\right|\right) + \frac{7}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{3/4}}\right) =$$

$$= 3\ \log\left(\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{\ldots}\right|\right) + \frac{7}{\ldots}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\ldots}\right) + C$$

DCV $\quad \frac{\ }{2} \log\left(\left|(x+\frac{\ }{2})^2+\frac{\ }{4}\right|\right) + \frac{\ }{\sqrt{3}} \cdots g\left(\frac{\ }{\sqrt{3/4}}\right) + C$

POLINOMIOS DE TAYLOR



- $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ es la recta tangente al gráfico de f en el punto a

- Recordamos que la recta tangente en a es una función lineal $P(x)$ que cumple $P(a) = f(a)$ y $P'(a) = f'(a)$

Pensamos $P(x)$ (la recta tangente en a) como una aproximación de f "cerca" de a.

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

ERROR o RESTO

$$\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a} \Big(\overset{\to f(a)}{f(x)} - f(a) - f'(a)(x-a) \Big) = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)} = \lim_{x\to a} \overset{\to f'(a)}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} - \frac{f'(a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}} = 0$$

"El RESTO TIENDE a 0 MUY RÁPIDO CUANDO $x \to a$"

Veremos más adelante que la recta tangente al gráfico en a es el polinomio de Taylor de orden 1 en a.

También definiremos el Polinomio de Taylor de orden n en a y veremos que el error o resto de aproximar f por el polinomio de Taylor de orden n en a cumple

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Notación: $f^{(k)}$ es la deriva k-ésima de f

$f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = (f')'$; $f^{(3)} = ((f')')'$; .....

$f^{(0)} = f$

Ej: $f(x) = e^{2x}$; $f^{(1)}(x) = 2 . e^{2x}$

$$f^{(2)}(x) = (2 . e^{2x})' = 4 . e^{2x}$$

$$f^{(3)}(x) = (4 . e^{2x})' = 8 e^{2x}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$$

Definición: Sea $f : I \to \mathbb{R}$ n veces derivable. Y $a \in I$.

Entonces, el polinomio de Taylor de f de orden n en a, es el único polinomio $P_n(f,a)$ de grado $\leq n$ que cumple

$$P_n(f,a)(a) = f(a)$$
$$\left(P_n(f,a)\right)^{(1)}(a) = f^{(1)}(a)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\left(P_n(f,a)\right)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Veamos que hay un único polinomio P de grado ≤ 3 que cumple que

$$\boxed{\begin{aligned} P(0) &= f(0) \\ P^{(1)}(0) &= f^{(1)}(0) \\ P^{(2)}(0) &= f^{(2)}(0) \\ P^{(3)}(0) &= f^{(3)}(0) \end{aligned}} \qquad (*)$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\boxed{P(0) = a_0}$$

$$P^{(1)}(x) = 1.a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

$$\boxed{P^{(1)}(0) = 1.a_1}$$

$$p^{(2)}(x) = 2a_2 + 3.2a_3x$$

$$\boxed{p^{(2)}(0) = 2a_2}$$

$$p^{(3)}(x) = 3.2a_3$$

$$\boxed{p^{(3)}(0) = 3.2.a_3}$$

Igualando ⊛

$$a_0 = P(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = f(0)$$

$$a_1 = p^{(1)}(0) = f^{(1)}(0) \Rightarrow a_1 = f^{(1)}(0)$$

$$2a_2 = p^{(2)}(0) = f^{(2)}(0) \Rightarrow a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2}$$

$$3.2a_3 = P^{3}(0) = f^{(3)}(0) \Rightarrow a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3.2}$$

El polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto 0 es

$$P_3(f,0)(x) = f(0) + f^{(1)}(0).x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3.2}x^3$$

$0! = 1$ $\qquad$ $4! = 4.3.2.1$

$1! = 1$
$2! = 2 . 1$
$3! = 3 . 2 . 1$

$$\boxed{n! = n . (n-1)!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \ldots (2)\,1$$

En general

$$\left[P_n(f, 0)\right](x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} . x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} . x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

El coeficiente a_k del $P_n(f, 0)$ es

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$
