MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Henry Figueredo Losada

Universidad de la República-Uruguay

IIMPI-FING

henryf@fing.edu.uy

6 de noviembre de 2020

Sumario

CLASE 10.

TEMA IV. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 3D-ESTÁTICOS.

1. Introducción.

2. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo tetraédrico.

   2.1 Selección de las funciones de desplazamientos.

3. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo hexaédrico lineal.

TEMA IV. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 3D-ESTÁTICOS.

CLASE 10. COMPLEMENTOS DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 3D-ESTÁTICOS.

1. Introducción.
2. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo tetraedro. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma.
3. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo hexaédrico lineal.

1. Introducción.

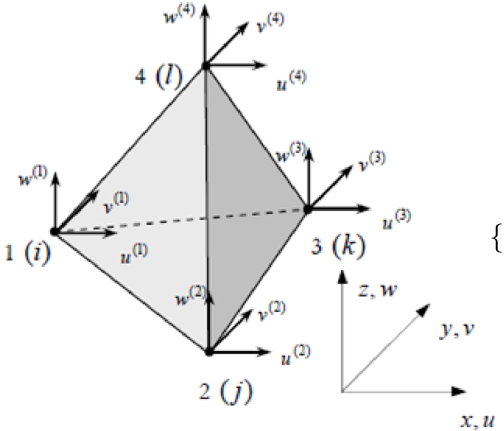
Anteriormente construimos una biblioteca para elementos 1D y 2D-estáticos, siguiendo los mismos procedimientos vamos a construir nuestra biblioteca de elementos 3D-estáticos.

El procedimiento para desarrollar las ecuaciones será similar a la de los elementos 2D detallados anteriormente. En los desarrollos de los elementos siguientes será establecer principalmente los siguientes tres pasos de procedimientos como:

1. Construcción de las funciones de forma matriz N que satisfaga las 3 propiedades Ec. (5.8) -(5.9);
2. Formulación de la *Matriz Desplazamiento-Deformación* $\mathbf{B}$;
3. Cálculo de $\{\mathbf{k_e}\}, \{\sigma_\mathbf{e}\}, \{\varepsilon_\mathbf{e}\}$.

2. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo tetraédrico.

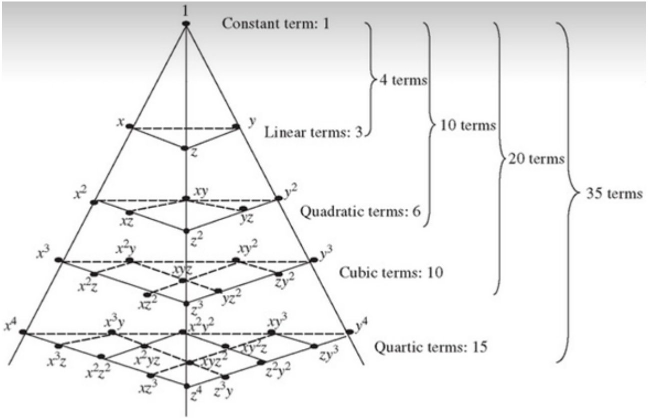
Consideremos o elemento finito solido tetraédrico de cuatro nodos, el elemento solido presenta 3 grados de libertad por nodos (DOF), con 4 nodos este elemento tendrá 12 grados de libertad como:



$$\{f\}_{12x1} = [\mathbf{K}]_{12x12}\ \{\delta\}_{12x1}$$

2.1 Selección de las funciones de desplazamientos.

Al igual que vimos en clases anteriores para elementos 2D, tenemos que establecer una relación entre los desplazamientos dentro del elemento con los desplazamientos nodales,



Continuación.

Siendo definido por las componentes u,v y w en las direcciones x, y y z respectivamente. La función de desplazamiento del elemento será una función lineal:

$$\{\mathbf{u(x,y,z)}\} = \begin{cases} u(x,y,z) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4z \\ v(x,y,z) = C_5 + C_6x + C_7y + C_8z \\ w(x,y,z) = C_9 + C_{10}x + C_{11}y + C_{12}z \end{cases}$$

Continuación.

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar en forma matricial.

$$\{\mathbf{u(x,y,z)}\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{Bmatrix}$$

$$= \mathbf{p}(x, y, z)\mathbf{C}$$

Clase No.10

Continuación.

$$\left\{\begin{array}{c}
u\left(x_1, y_1, z_1\right) \equiv u_1 = C_1 + C_2 x_1 + C_3 y_1 + C_4 z_1 \\
v\left(x_1, y_1, z_1\right) \equiv v_1 = C_5 + C_6 x_1 + C_7 y_1 + C_8 z_1 \\
w\left(x_1, y_1, z_1\right) \equiv w_1 = C_9 + C_{10} x_1 + C_{11} y_1 + C_{12} z_1 \\
\dotfill \\
u\left(x_2, y_2, z_2\right) \equiv u_2 = C_1 + C_2 x_2 + C_3 y_2 + C_4 z_2 \\
v\left(x_2, y_2, z_2\right) \equiv v_2 = C_5 + C_6 x_2 + C_7 y_2 + C_8 z_2 \\
w\left(x_2, y_2, z_2\right) \equiv w_2 = C_9 + C_{10} x_2 + C_{11} y_2 + C_{12} z_2 \\
\dotfill \\
u\left(x_3, y_3, z_3\right) \equiv u_3 = C_1 + C_2 x_3 + C_3 y_3 + C_4 z_3 \\
v\left(x_3, y_3, z_3\right) \equiv v_3 = C_5 + C_6 x_3 + C_7 y_3 + C_8 z_3 \\
w\left(x_3, y_3, z_3\right) \equiv w_3 = C_9 + C_{10} x_3 + C_{11} y_3 + C_{12} z_3 \\
\dotfill \\
u\left(x_4, y_4, z_4\right) \equiv u_4 = C_1 + C_2 x_4 + C_3 y_4 + C_4 z_4 \\
v\left(x_4, y_4, z_4\right) \equiv v_4 = C_5 + C_6 x_4 + C_7 y_4 + C_8 z_4 \\
w\left(x_4, y_4, z_4\right) \equiv w_4 = C_9 + C_{10} x_4 + C_{11} y_4 + C_{12} z_4
\end{array}\right.$$

Clase No.10

Continuación.

Reescribiendo la ecuación anterior en forma compacta como:

$$\{u_e\}_{12x1} = [\mathbf{A}]_{12x12}\{C\}_{12x1} \tag{1}$$

Calculando los coeficientes de $\mathbf{C}$, utilizando la inversa de $[\mathbf{A}]$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]^{-1}\{u_e\} &= [\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{A}]\{C\} \\ \rightarrow [\mathbf{A}]^{-1}\{u_e\} &= [\mathbf{1}]\{C\} \;\therefore \quad \{C\} = [\mathbf{A}]^{-1}\{u_e\} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación como:

$$\{\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})\} = \; \mathbf{p}(x, y, z)[\mathbf{A}]^{-1}\{u_e\} \; = [\mathbf{N}]\{u_e\}$$

Continuación.

Donde la *función de forma* **N**, para el campo de desplazamiento como:

$$[\mathbf{N}]_{3x12} = \mathbf{p}(x, y, z)_{3x12}[\mathbf{A}]^{-1}{}_{12x12}$$

Por analogía podemos establecer:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

Continuación.

Definimos las funciones de formas como:

$$N_1(x,y,z)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}};\qquad N_2(x,y,z)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x & y & z\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}};$$

Clase No.10

Continuación.

$$N_3(x,y,z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}; \qquad N_4(x,y,z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}};$$

Siendo $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 3!V = 6V$

Clase No.10

Continuación.

Reescribiendo la ecuación

$$\begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & 0 & \vdots & N_3 & 0 & 0 & \vdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \vdots & 0 & N_2 & 0 & \vdots & 0 & N_3 & 0 & \vdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \vdots & 0 & 0 & N_2 & \vdots & 0 & 0 & N_3 & \vdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \cdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

.

Continuación.

Reescribiendo la ecuación

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(x)\} = [\mathbf{L}]\{u(x)\} = [\mathbf{L}][\mathbf{N}]\{u_e\} = [\mathbf{B}(x)]\{u_e\}$$

$$[\mathbf{B}(\mathbf{x})] = [\mathrm{B}_1\ \mathrm{B}_2\ \mathrm{B}_3\ \mathrm{B}_4]$$

Clase No.10

Continuación.

Es importante resaltar las derivadas de la funciones u, v,w como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_7 \\ C_{12} \\ C_3 + C_6 \\ C_4 + C_{10} \\ C_8 + C_{11} \end{Bmatrix}$$

Continuación.

Deformaciones Calculadas

Las deformaciones calculadas para el elemento son constantes.

Siendo una de las limitaciones del elemento solido tetraédrico lineal, el *Elemento sólido tetraédrico linear es un elemento de deformaciones constantes*.

Similarmente podemos efectuar el cálculo de las tensiones a partir del cálculo de las deformaciones, entonces podemos concluir que también es un elemento de tensiones constantes, el *Elemento sólido tetraédrico linear es un elemento de tensiones constantes*.

✓

Continuación.

En aulas anteriores ya fue obtenida la ecuación para matriz de rigidez de un elemento genérico y podemos generalizar para cualquier elemento solido 3D con n nodos como:

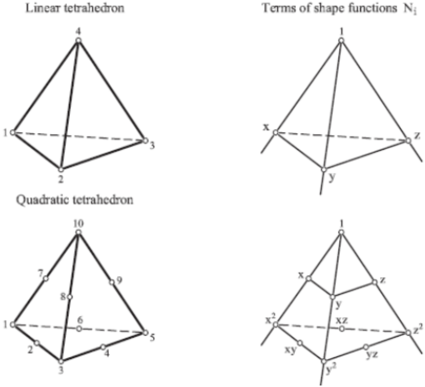
$$[K^e]_{3nx3n} = \int_{vol} [\mathbf{B}(x)]^T{}_{3nx6} \cdot [\mathbf{D}]_{6x6} \cdot [\mathbf{B}(x)]_{6x3n} \, \mathbf{dVol}$$

La ecuación para el tetraedro de 4 nodos con las propiedades del material homogéneo y con la matriz de deformación constante es dada como:

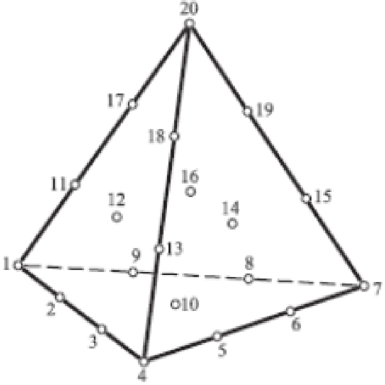
$$[K_{ij}{}^e]_{3x3} = [\mathbf{B}(x)_i]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot \left[\mathbf{B}(x)_j\right] \mathbf{V}$$

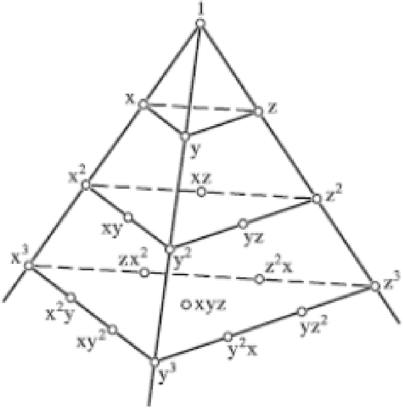
Continuación.

Podemos notar que los elementos tetraédricos de lados rectos son una extensión 3D directa de triángulos de lados rectos. Sus funciones de interpolación son polinomios completos con términos que pueden ser fácilmente deducidos del *tetraédro de Pascal*



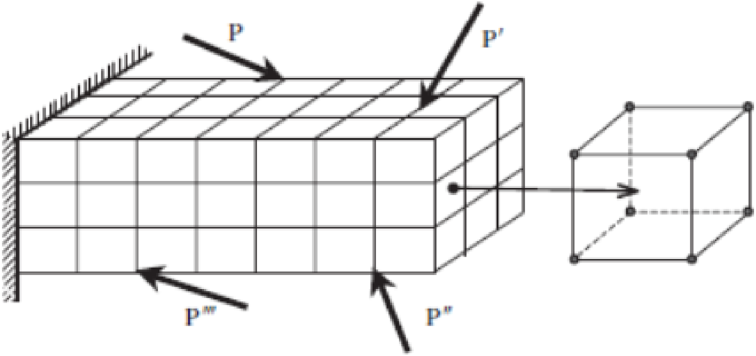
Continuación.





3. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo hexaédrico lineal.

La figura representa un cuerpo sólido sobre la acción de fuerzas en las tres direcciones *x*, *y*, *z*, para la división del cuerpo solido utilizamos un montaje de elementos solidos de tipo paralelepípedos **(que son los elementos solidos hexaédrico lineal)**.



3. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo hexaédrico lineal.

El movimiento de los nodos de los elementos puede ser descrito por los componentes *u, v, w* efectuada por tres componentes de desplazamientos presentando 3 grados de libertad (DOF=3) por nodo, como tiene 8 nodos este elemento tendrá 24 grados de libertad expresado como:

$$\{f\}_{24x1} = [\mathbf{K}]_{24x24} \ \{\delta\}_{24x1}$$

Siguiendo el mismo procedimiento vamos a definir las funciones de interpolación:

$$u(x, y, z) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4z + C_5xy + C_6xz + C_7yz + C_8xyz$$

$$\mathrm{v(x,y,z)}=\mathrm{C}_9 + C_{10}x + C_{11}y + C_{12}z + C_{13}xy + C_{14}xz + C_{15}yz + C_{16}xyz$$
$$\mathrm{w(x,y,z)}=\mathrm{C}_{17} + C_{18}x + C_{19}y + C_{20}z + C_{21}xy + C_{22}xz + C_{23}yz + C_{24}xyz$$

Clase No.10

Continuación.

Escribimos las funciones de forma *Ni(x,y,z)*

$$N_1(x,y,z)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & z & xy & xz & yz & xyz \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2y_2z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3y_3z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4y_4z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5y_5z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6y_6z_6 \\ 1 & x_7 & y_7 & z_7 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7y_7z_7 \\ 1 & x_8 & y_8 & z_8 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8y_8z_8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1y_1z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2y_2z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3y_3z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4y_4z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5y_5z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6y_6z_6 \\ 1 & x_7 & y_7 & z_7 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7y_7z_7 \\ 1 & x_8 & y_8 & z_8 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8y_8z_8 \end{vmatrix}}$$

Clase No.10

Continuación.

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} C_2 + C_5 y + C_6 z + C_8 yz \\ C_{11} + C_{13} x + C_{15} z + C_{16} xz \\ C_{20} + C_{22} x + C_{23} y + C_{24} xy \\ \\ C_3 + C_5 x + C_7 z + C_8 xz + C_{10} + C_{13} y + C_{14} z + C_{16} yz \\ C_4 + C_6 x + C_7 y + C_8 xy + C_{18} + C_{21} y + C_{22} z + C_{24} yz \\ \\ C_{12} + C_{14} x + C_{15} y + C_{16} xy + C_{19} + C_{21} x + C_{23} z + C_{24} xz \end{array} \right\}$$

Clase No.10

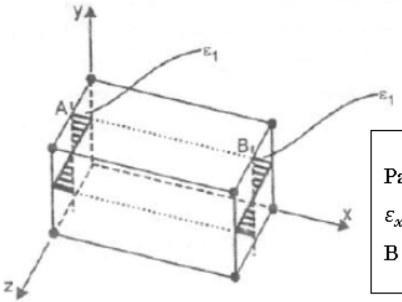
Continuación.

Como podemos notar las deformaciones son funciones y se aplican en todos los puntos del elemento variando linealmente, por tanto, no son constante, como en el caso del elemento sólido tetraédrico lineal. La deformación ε_x varia linealmente con y , z cualquier variación lineal de las deformaciones a lo largo de la sección transversal del elemento podrá ser representado por el elemento solido hexaédrico lineal.

Como una limitación de este elemento solido hexaédrico lineal debe ser observada que la deformación en ε_x indica que las deformaciones en la dirección X varían linealmente con y , z , pero independientes de x , eso nos dice que para un elemento hexaédrico lineal , para dada una posición definida por x , z a lo largo del elemento , independiente de la posición de x en que se encuentre, las deformaciones son constante a lo largo de todo el largo del elemento.

Clase No.10

Continuación.



Elemento Hexaédrico

Para un dado y y z dentro del elemento, ε_x no varía con x, Así en los puntos A y B del elemento $\varepsilon_x = \varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon_1$.

Nota: Como cuidado para elemento solido hexaédrico lineal debemos evitar utilizar en una región en que ocurra una acentuada variación de la deformación ε_x a lo largo del eje x del elemento, evitar la definición de un elemento muy largo en relación con su altura, puesto que la deformación ε_x será constante en la dirección x.