

Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

**MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL
MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS**

CLASE N° 9

**COMPLEMENTOS DE LA FORMULACIÓN DE
ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.**

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

Montevideo. Uruguay.

Noviembre 2019

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

CLASE 9. COMPLEMENTOS DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

Sumario.

1. **Introducción.**
2. **Conceptos sobre convergencia de resultados.**
3. **Elementos con modos de desplazamientos incompatibles.**

Objetivos.

Conocer los conceptos más importantes para la formulación de elementos finitos sobre convergencia y aplicaciones prácticas con la utilización de programas de PC.

Bibliografía.

9. Klaus-Jurgen Bathe "Finite Element Procedures", 2da Edição.
10. G.R.Liu "The Finite element Method- A practical course".
11. The Finite Element Method using MATLAB - Kwon and Bang
12. George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics McGraw-Hill.
13. Chaves, E, W.V. & Mínguez, R. (2009). "Mecánica Computacional en la Ingeniería con aplicaciones en MATLAB. Editorial UCLM.

Bibliografía opcional portugués

12. Avelino Alves Filho "Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE", 5ta Edição.

1. Introducción.

En continuación con las aulas anteriores vamos a terminar con algunos complementos para la formulación de elementos finitos 2D- estáticos, destacando los conceptos más importantes para el uso y formulación correcta. Anteriormente realizamos algunos *testes de convergencia* con la utilización de elementos triangulares linear y cuadrilátero rectangular de estado plano de tensiones sus resultados fueron comparado con la respuesta analítica dada por la teoría de la elasticidad. La función de interpolación asumida para representar el campo de desplazamientos dentro del elementos finitos impone limitaciones en la obtención de resultados.

2. Conceptos sobre convergencia de resultados.

El efecto del dimensionamiento de la malla garante la convergencia de tipo (h), es una medida de que el modelo va a converger para una solución exacta a medida que el tamaño h del

elemento van disminuyendo, argumentase [17,3,11] se la aproximación para el campo incógnita fuera capaz en el límite , reproducir exactamente cualquier distribución de desplazamiento dentro del medio continuo y se la aproximación de cada solución fuera única , entonces el modelo va a converger para a la solución exacta y única en el limite $h \rightarrow 0$.

Estos resultados son observados en modelo MEF anteriores donde a medida que se efectuó el refinamiento de la malla los resultados obtenidos fueron progresivamente mejores, de esta forma a solución analítica es encontrada, mismo con una discretización finita o mismo con un único elemento, se esta función fuera formada por las mismas funciones que son usadas en la aproximación dentro de cada elemento. Así si la solución analítica fuera de la forma de un polinomio cuadrático y la aproximación utilizada incluir todos los polinomios de este orden, la aproximación resultara en la solución correcta.

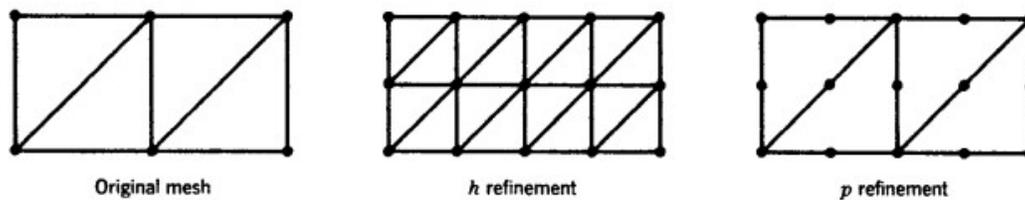


Figura 9.1 Refinamientos de tipo “h” y “p”. [10].

El refinamiento de tipo “h” fig 9.1, se refiere a una disminución del tamaño característico (h) de los elementos, dividiéndose cada elemento, pero sin alterar el tipo de elemento usado. El refinamiento tipo (p) se refiere a un aumento del grado (p) del polinomio completo de más alto grado en la formulación de los elementos. Una tercera alternativa para refinar una malla consiste en la modificación de la posición de los nodos, moviéndolos en la dirección de las regiones donde tenga gradientes acentuados en la solución, manteniéndose el mismo número de grados de libertad del modelo y el orden de los polinomios en los elementos (llamado refinamiento de tipo “r”).

A convergencia por el tamaño del elemento aumentando el número de elementos se reduce el error por el tamaño del elemento, hasta alcanzar la convergencia en la solución y cuando el número de elementos no influir en la solución del modelo aproximado. De esta forma debemos agregar la convergencia de tipo (p) que es utilizada para decidir cuál es el grado de la función de interpolación del elemento a utilizar que corresponda mejor al modelo físico estudiado.

Entretanto por la propia naturaleza del problema discreto, al representar los infinitos grados de libertad del continuo, por un número finito o discreto de grados de libertad, *a solución obtenida será siempre una aproximación*, independientemente del refinamiento adoptado. De manera evidente como se menciona anteriormente de acuerdo con la formulación escogida para el elemento y con el tamaño de la malla adoptado, la aproximación obtenida será satisfactoria, pudiendo estar muy próxima del resultado analítico y el desvío tornarse despreciable.

La cuestión de la convergencia obtenida en la utilización de los elementos finitos en general será abordada en 2 etapas [12]:

- De forma directa, utilizaremos los conceptos matemáticos introducidos, dando énfasis a la interpretación del comportamiento físico que el elemento finito se propone a representar.
- Posteriormente, será discutida la condición de equilibrio a partir de la identificación de la energía potencial total de la estructura. En particular, en el caso del régimen elástico, puede ser mostrado que la Energía Potencial Total atinge un mínimo en la condición de equilibrio.

De una forma directa la *cuestión de la convergencia está asociada a la función de interpolación escogida*, que debería tener la capacidad de representar el campo de desplazamientos en cada trecho del modelo, lo más próximo posible del desplazamiento real del modelo físico. El elemento finito debe ser muy bien definido y las funciones de interpolación escogidas están sujetas algunas restricciones adicionales, enunciando un criterio [12]:

Si el modelo físico sufre desplazamientos, más una parte de este se desplazar sin presentar deformaciones, la formulación del elemento debe tener condiciones de representar esta situación física. O sea, el elemento no debe contabilizar deformaciones ocurrentes de movimientos de cuerpo rígido.

Dados los argumentos presentados anteriormente podemos preguntarnos por qué no atribuir a las funciones de desplazamientos grados mayores (dispensando la constante y el término de primer orden) si las deformaciones dentro del elemento son obtenidas a partir de las

derivadas de los desplazamientos, las deformaciones serian representadas de forma más ventajosa.

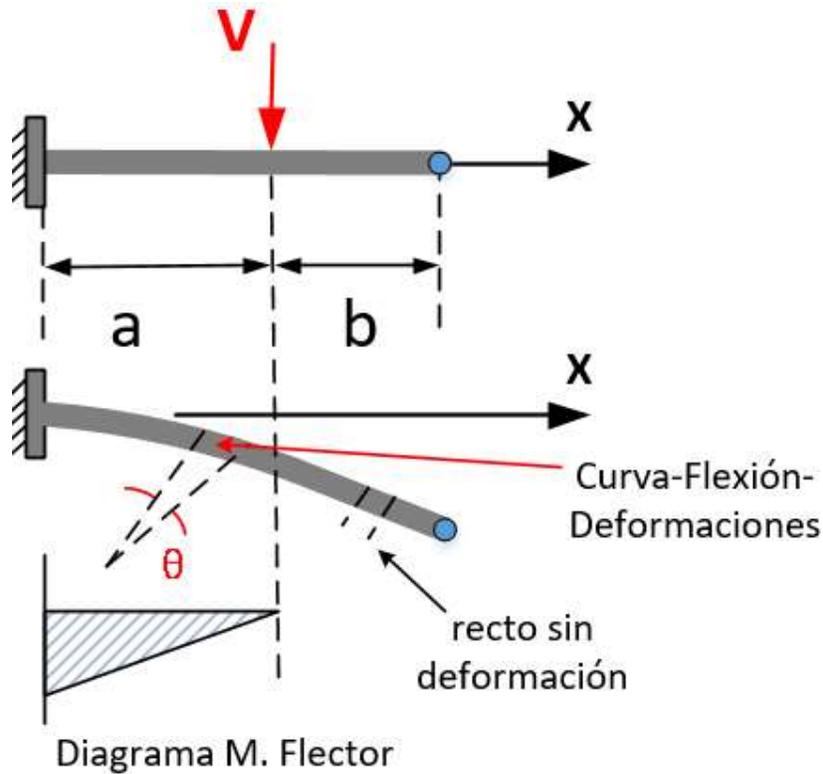


Figura 9.2 viga en Cantilever con deformación y sin deformación.

La viga en cantilever de la fig 9.2, muestra tramos con deformación y sin deformación, utilizando los conocimientos para el cálculo de las deflexiones en vigas, vamos a utilizarlas con el objetivo de discutir algunos conceptos en la formulación de los elementos finitos.

Para $0 \leq x \leq a$ utilizando las tablas tenemos:

$$v(x) = \frac{Px^2}{6EI}(3a - x) = \frac{Pa}{2EI}x^2 - \frac{Px^3}{6EI} \quad (9.1)$$

En este tramo, los desplazamientos son indicados por la función de mayor orden 3er grado, representando el tramo curvo sobre la flexión de la viga. Las deformaciones asociadas a la flexión $EI \cdot v(x)'' = M(x)$ son dadas por la segunda derivada de los desplazamientos:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{Pa}{EI}x - \frac{Px^2}{2EI} \quad (9.2)$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{Pa}{EI} - \frac{Px}{EI}$$

En este tramo la viga está sobre acción de los momentos flectores.

Para $a \leq x \leq L$ utilizando las tablas tenemos:

$$v(x) = \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) = \frac{Pa^2}{2EI}x - \frac{Pa^3}{6EI} \quad (9.3)$$

En este tramo los desplazamientos son indicados por una función de 1er grado, representando un trecho recto en el cual no ocurre la acción de los momentos flectores y consecuentemente sin deformación. Las deformaciones son calculadas a partir de la segunda derivada de los desplazamientos como:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{Pa^2}{2EI} \quad (9.4)$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0$$

La Ec. (9.4) representa la condición de la viga desplazarse sin deformarse.

Como en la estructura los desplazamientos varían de punto a punto, las ecuaciones Ec. (9.1) y Ec. (9.3) deben traducir esa *compatibilidad de desplazamiento*:

$$\text{Para } x=a, \text{ Ec. (9.1)} \quad v(x) = \frac{Pa}{2EI} a^2 - \frac{Pa^3}{6EI} = \frac{Pa^3}{3EI} \quad (9.5)$$

$$\text{Para } x=a, \text{ Ec. (9.3)} \quad v(x) = \frac{Pa^2}{2E} a - \frac{Pa^3}{6EI} = \frac{Pa^3}{3EI}$$

En el *punto a*, el desplazamiento es el mismo obtenido por las 2 funciones.

$$\text{Para } x=a, \text{ Ec. (9.2)} \quad v(x)'' = \frac{Pa}{EI} - \frac{Pa}{EI} = 0 \quad (9.6)$$

$$\text{Para } x=a, \text{ Ec. (9.4)} \quad v(x)'' = \frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0$$

La estructura idealizada como un montaje de elementos finitos, fig 9.3 , la formulación debe garantizar que los tramos que se desplazan sin el efecto de momentos flectores puedan ser representados con deformación nula. De esta misma manera la chapa sobre la acción de la carga (en su propio plano), representando un Estado plano de Tensiones, al ser idealizada por un montaje de elementos triangulares, debe permitir que los desplazamientos en la región entre la aplicación de la carga y las extremidades libres estén libres de deformaciones.

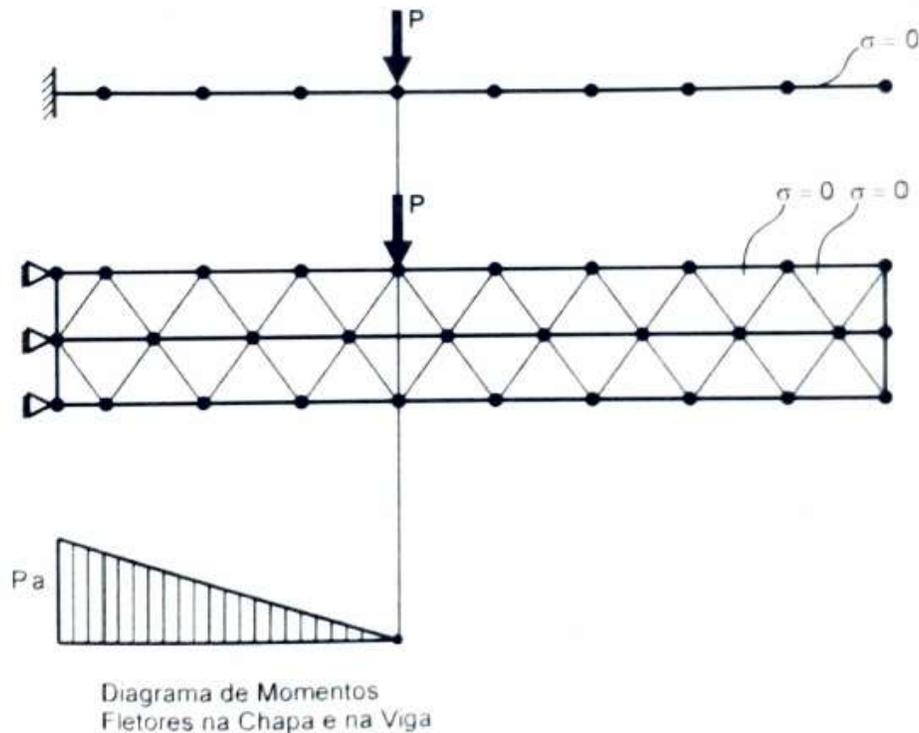


Figura 9.3 Representación de la región sobre tensión y tensión nula. (Alves 2018).

Como vimos en las aulas anteriores las funciones de interpolación para los elementos de viga y el elemento de estado plano de tensiones, para el elemento de viga tenemos:

$$v(x) = \underbrace{C_0 + C_1 \cdot x}_{\text{Función Lineal}} + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 \quad (9.7)$$

En la función de interpolación Ec. (9.7), el término de la función lineal representa la componente de desplazamiento cuya segunda derivada es cero. Este término no contribuye con deformaciones por flexión de la viga. El polinomio que representa el campo de desplazamiento fue representando de forma COMPLETA, desde el coeficiente C_0 hasta el mayor grado. Se no incluimos los términos de la función lineal Ec. (9.7), la formulación del elemento no tendría la capacidad de representar desplazamientos libres de deformaciones.

Como critério a rigor (Alves Filho 2018):

La función de interpolación debe permitir la representación de una condición de Deformación Constante, caso los desplazamientos nodales presentes sean representativos de esa situación física.

El caso particular presentado constituye el caso en que la deformación es una constante igual a cero.

2.1 Grado de Continuidad C^m

Para que los desplazamientos calculados por los elementos finitos converjan para el valor analítico, como fue visto en el caso del elemento triangular linear de estado plano de tensiones en el Teste de convergencia, el *campo de desplazamiento propuesto como una aproximación* (intermedio de un polinomio) debe ser **COMPLETO**. Una **serie polinomial** es completa si tiene un alto grado suficiente y si ningún termino es omitido.

Otra característica importante del polinomio que representa el campo de desplazamientos dentro del elemento es su **grado de Continuidad**, el campo de desplazamientos dentro del elemento traduce una variación continua de los desplazamientos punto a punto. La función adoptada para hacer esas representaciones debe, por tanto, ser continua. Como las deformaciones dentro del elementos son calculadas por las derivadas de los desplazamientos, estas derivadas deben ser también continuas.

Una función es llamada C^n , si sus derivadas de **orden j** para $0 \leq j \leq n$ existen y son funciones continuas en todo el dominio, un campo de desplazamientos es dicho que tiene Continuidad C^n , si las derivadas hasta el **orden n** de ese campo fueran continuas, fig 9.4.

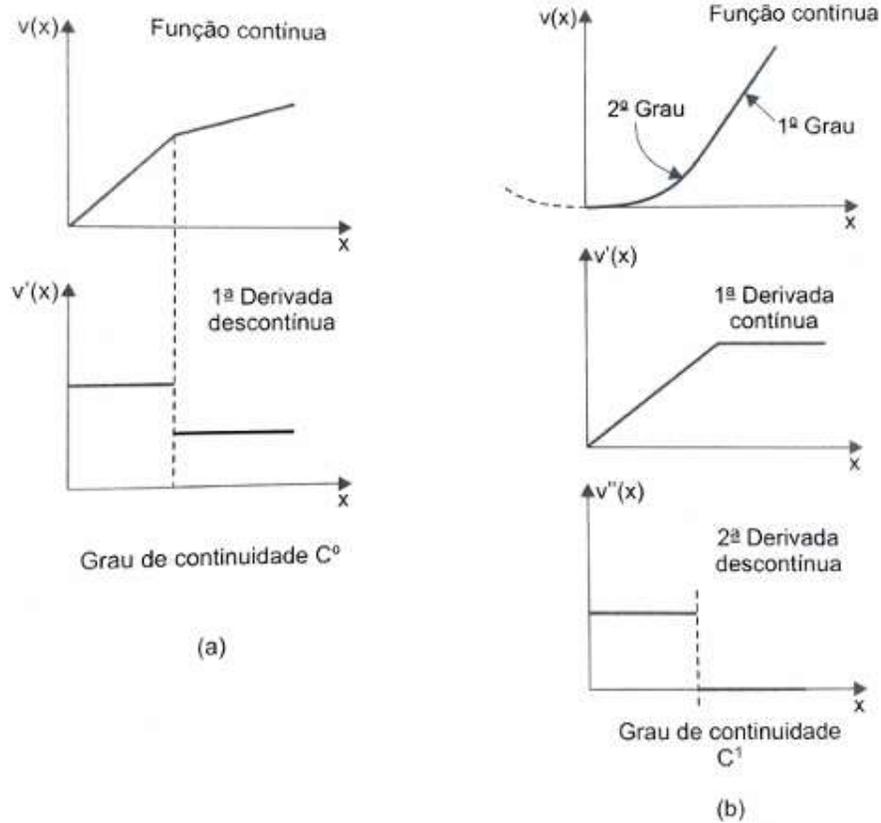


Figura 9.4 Grados de continuidade de una función. (Alves 2018)

Saliendo del abordaje de un elemento aislado para un abordaje de montaje de elementos finitos, y el estudio de la consecuente continuidad del modelo como un todo. En un campo de desplazamientos a lo largo del montaje completo de elementos, decimos que un elemento C^0 garantiza la continuidad del campo de desplazamientos entre elementos, mas no garantiza la continuidad de las primeras derivadas del campo. En una malla de elementos finitos C^0 , las funciones que representan las primeras derivadas de los desplazamientos presentan discontinuidad al pasar de un elemento para otro.

2.2 Generación de funciones de interpolación

Los elementos Lagrangianos sus funciones de interpolación se obtienen mediante productos de polinomios de Lagrange en cada dirección natural. Para los otros elementos Serendipitos no siempre es posible.

Como fue mencionado anteriormente la tasa de convergencia presentada por un elemento finito depende de la *Función Tentativa* adoptada para representar el campo de desplazamientos dentro del elemento; esta debe ser **completa**.

A figura 9.5-9.6 representa los términos de expansión polinomial del Triángulo de Pascal-que contiene la expansión $(x+y)^n$ podemos generar las formulaciones de elementos que son espacialmente isotrópicos en un problema bidimensional, que ten como variables x e y . En esta expansión se obtiene siempre un polinomio completo y están presente todos los posibles términos en la forma $x^n \cdot y^m$. Para esta expansión tenemos $p = n + m$ en que p es el grado según el cual el polinomio es completo.

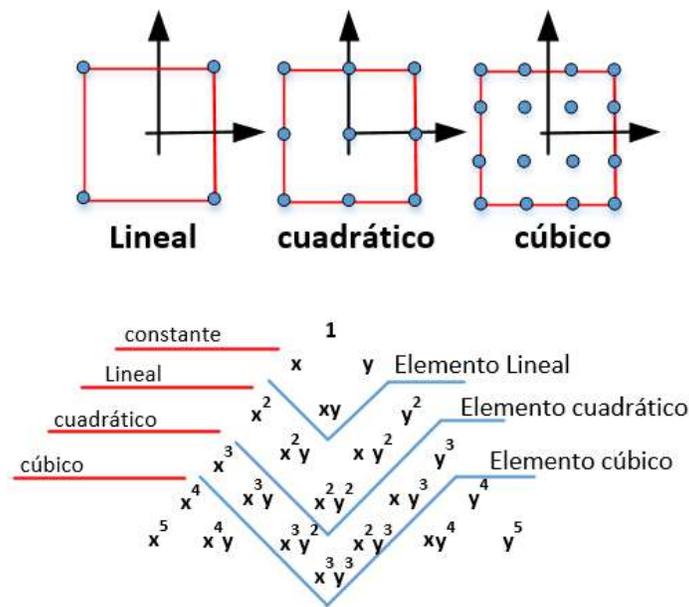


Figura 9.5 Elementos rectangulares lagrangianos (3x3).

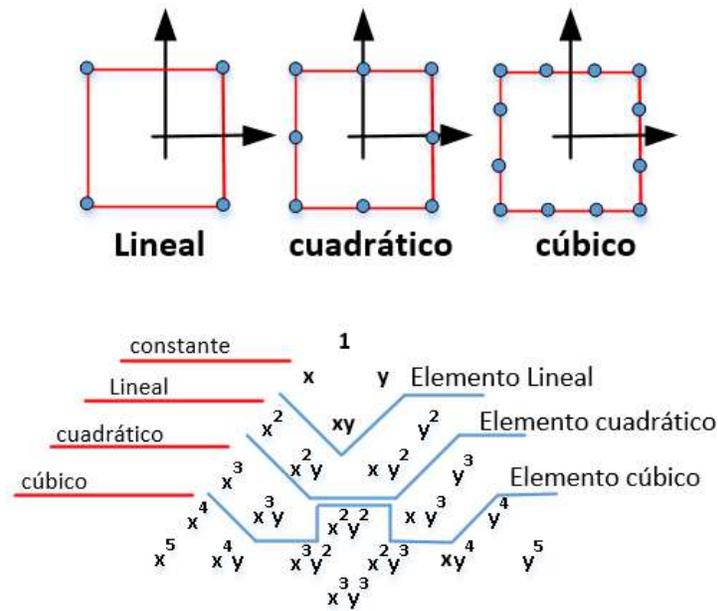


Figura 9.6 Elementos rectangulares serendipitos (3x3).

3. Elementos con modo de desplazamientos incompatibles

Como fue visto anteriormente para el elemento Rectangular lineal de estado plano de tensiones observamos algunas limitaciones físicas cuanto a la técnica de generación de las funciones de interpolación. La técnica de generación que considera modos de desplazamientos incompatibles del elemento mejora el cálculo de las deformaciones y tensiones dentro del elemento.

Para la introducción de este concepto vamos a apoyarnos en el **Elemento Rectangular de Tensión de Cizallamiento Constante**, introducido por Turner, Clough, Martin e Topp , en 1956 y constituye una referencia para el desarrollo de los elementos con modos de desplazamientos incompatible y abordado de forma didáctica en el libro de Alves (2018).

3.1 Elemento rectangular de tensión de cizallamiento constante – Estado Plano de Tensiones – “CSSR- CONSTANT SHEAR STRESS RECTANGLE ELEMENT”.

La formulación del Elemento **CSSR** sigue las mismas ideas de pasos generales para la formulación de cualquier elemento finito y no sufren ninguna modificación, recordando que siempre el primer paso en este procedimiento general fue la definición de un **campo de desplazamientos** modelo matemático por el cual el campo de desplazamiento dentro del elemento es asumido.

Asumiendo un camino diferente: ¿por qué en vez de utilizar una función de desplazamientos para definir el comportamiento interno del elemento no especificamos **el Campo de Tensiones dentro del elemento finito**, y que represente el comportamiento que deseamos?

Hasta el momento nuestros pasos aplicados para determinar la matriz de rigidez de cualquier elemento finito necesitamos el campo de desplazamiento admitido por elemento, pero esta cuestión puede ser resuelta de forma semejante, recorriendo el *camino inverso*.

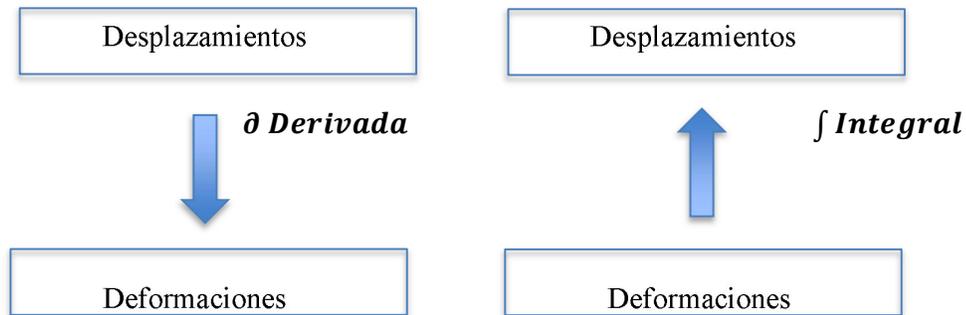


Figura 9.7 Camino inverso para formular el Elemento **CSSR**.

La figura 9.8 representa la distribución de tensiones asumidas para ese elemento con la variación de las tensiones normales (σ) varían linealmente y las tensiones de cizallamientos (τ) son constantes, para esta distribución podemos representar como:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_1 + C_2 \cdot y \\ \sigma_y &= C_3 + C_4 \cdot x \\ \tau &= C_5 = \text{Constante}\end{aligned}\tag{9.8}$$

A continuación, debemos asociar el campo de desplazamiento que satisfaga el campo de tensiones Ec. (9.8), con este campo de desplazamiento podemos realizar los mismos pasos anteriores para todos los elementos finitos.

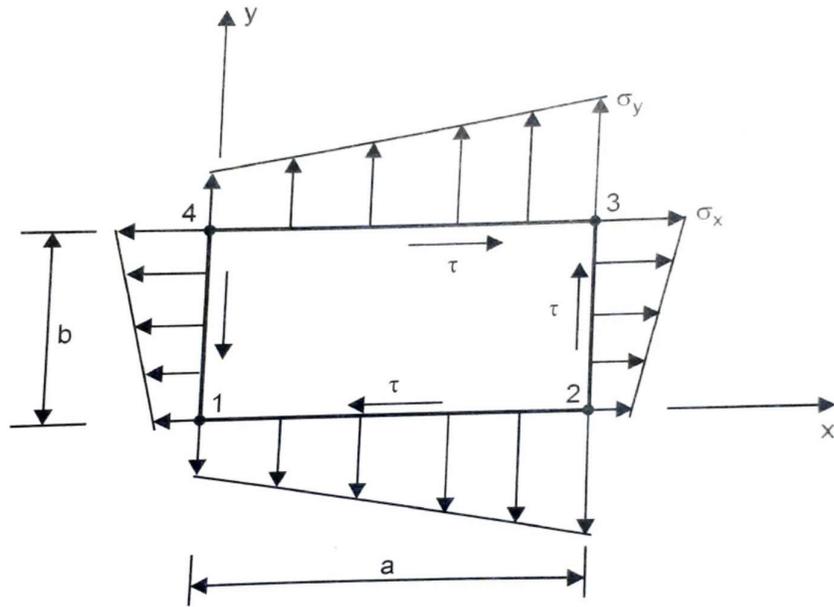


Figura 9.8 Distribución de tensiones en el elemento rectangular de estado plano de tensiones y de tensión de cizallamiento constante. (Alves 2018)

A partir de las deformaciones y la ley constitutiva

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [C_1 + C_2 y - \nu C_3 - \nu C_4 x]$$

(9.9)

Integrando para $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [C_1 + C_2 y - \nu C_3 - \nu C_4 x]$

$$u = \frac{1}{E} \left\{ \left[C_1 x + C_2 x y - \nu C_3 x - \nu C_4 \frac{x^2}{2} \right] + f(y) \right\}$$

Siendo $f(y)$ una constante de integración.

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

(9.10)

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [C_3 + C_4x - vC_1 - vC_2y]$$

Integrando para $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [C_3 + C_4x - vC_1 - vC_2y]$

$$v = \frac{1}{E} \left\{ \left[C_3y + C_4xy - vC_1y - vC_2 \frac{y^2}{2} \right] + g(x) \right\}$$

Siendo $g(x)$ la constante de integración.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau}{G} = 2(1 + \nu) \frac{C_5}{E} \quad (9.11)$$

Calculando $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$ y sustituyendo en la Ec. (9.11)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{E} C_2x + \frac{1}{E} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E} C_4y + \frac{1}{E} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + C_4y = 2(1 + \nu)C_5 - \frac{\partial g}{\partial x} - C_2x$$

En la Ec. (9.12) tenemos de un lado solo una función de y y en el otro una función de x . Esta ecuación solo puede ser satisfecha cuando los dos lados son iguales a una constante C_6 .

Integrando las 2 partes:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + C_4y = C_6 \quad (9.13)$$

$$2(1 + \nu)C_5 - \frac{\partial g}{\partial x} - C_2x = C_6$$

Introduciendo las constantes de integración:

$$f(y) = -C_4 \frac{y^2}{2} + C_6 y + C_7$$

$$g(x) = -C_2 \frac{x^2}{2} + [2(1 + \nu)C_5 - C_6]x + C_8$$

Resultando en las funciones de desplazamientos como:

$$u = \frac{1}{E} \left[\left(C_1 x + C_2 xy - \nu C_3 x - \nu C_4 \frac{x^2}{2} \right) - \frac{C_4}{2} y^2 + ((1 + \nu)C_5 + C_6)y + C_7 \right] \quad (9.14)$$

$$v = \frac{1}{E} \left[\left(C_3 y + C_4 xy - \nu C_1 y - \nu C_2 \frac{y^2}{2} \right) - \frac{C_2}{2} x^2 + ((1 + \nu)C_5 - C_6)x + C_8 \right] \quad (9.15)$$

A partir de las Ec. (9.14) y Ec. (9.15) que establecen las funciones de desplazamientos, puede iniciar el procedimiento para general la matriz de rigidez del elemento finito.

Nota: El elemento rectangular de cuatro nodos (cuadrilátero bilineal) ofrece un alto grado de precisión para problemas en los que predominen estados de tracción o compresión puras, pero, por el contrario, en problemas en los que se presenten fenómenos de flexión importantes el comportamiento de este elemento es bastante deficiente, siendo necesario utilizar mallas muy finas para obtener resultados aceptables. La razón de este fenómeno reside en la imposibilidad de la interpolación lineal de los desplazamientos en los lados del elemento ser incapaz de reproducir la deformada curva que se produce en los estados de flexión, fig 9.9-9.10, Esto provoca una rigidez excesiva del elemento, con la consiguiente pérdida de precisión.

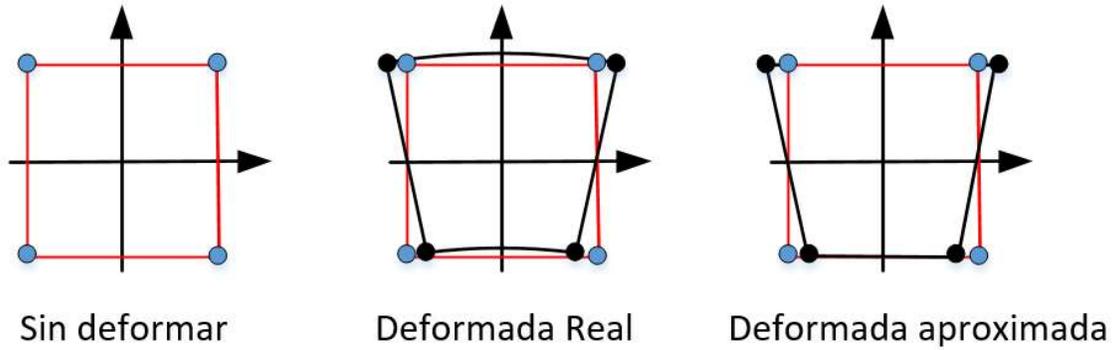


Figura 9.9 Configuración sin deformar y deformada de un elemento rectangular de cuatro nodos para los desplazamientos nodales producidos por una flexión pura.

La energía de deformación del elemento está produciendo deformaciones cizallamientos en vez de deformación a flexión. El efecto final como se mencionó anteriormente es que los elementos quedan muy rígidos sobre la acción del momento flector, provocando desplazamientos errados, tensiones falsas y frecuencias naturales engañosas, se recomienda para estos casos utilizar mallas más refinadas, elementos de mayor alto orden que tengan compatibilidad con la deformación a flexión o mejorar utilizando la adición de modos de deformación incompatibles vista anteriormente.

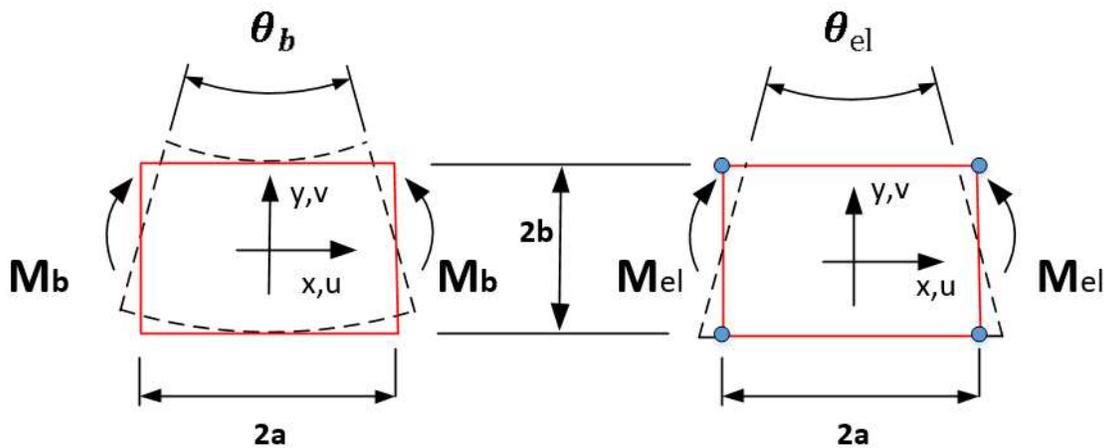


Figura 9.10 Configuración de una sección rectangular en flexión pura y la deformación del elemento finito rectangular en flexión.

En resumen, elementos inadecuados pueden dar lugar a problemas de bloqueo de la solución por excesiva rigidez a cortante y la propagación de modos de deformación de energía nula en mallas regulares (“hourglass”), fig 9.11.

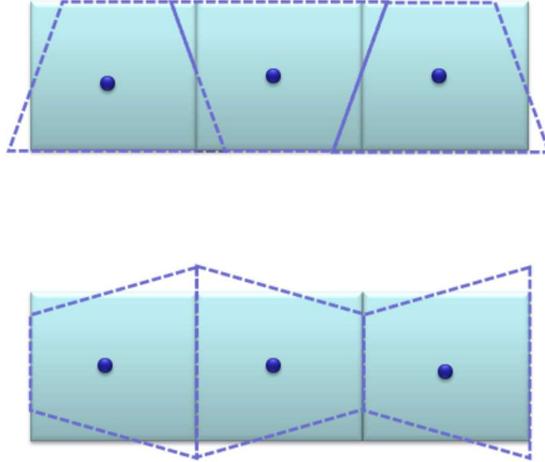


Figura 9.11 propagación de modos de “hourglass” através de una malla.