Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS

CLASE N^0 8

ELEMENTOS 2D EN ESTADO PLANO. FORMULACIÓN DE ELEMENTO RECTANGULAR.

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

Montevideo. Uruguay.
Noviembre 2019

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

CLASE 8. FORMULACIÓN DE ELEMENTO RECTANGULAR.

Sumario.

1. Introducción.

2. Formulación de la función de forma para un elemento 2D de tipo rectangular.

3. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma.

Objetivos.

Conocer los conceptos más importantes para definir la matriz de rigidez de elementos finitos en estado plano de tensiones o deformaciones 2D.

Bibliografía.

9. Klaus-Jurgen Bathe "Finite Element Procedures", 2da Edição.
10. G.R.Liu “The Finite element Method- A practical course”.
11. The Finite Element Method using MATLAB - Kwon and Bang
12. George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics McGraw-Hill.
13. Chaves, E, W.V. & Mínguez, R. (2009). “Mecánica Computacional en la Ingeniería con aplicaciones en MATLAB. Editorial UCLM.

Bibliografía opcional portugués

12. Avelino Alves Filho "Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE", 5ta Edição.

1. <u>Introducción.</u>

En continuación con las aulas anteriores vamos a introducir otro tipo de elemento finito como parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea ya tenemos definidos los elementos de tipos resortes (spring), barra (truss) y vigas (Beam), y el elemento2D de tipo triangular en esta clase vamos a formular nuestro segundo elemento de tipo 2D en estado plano de deformaciones o tensiones (elemento rectangular).

El procedimiento para desarrollar las ecuaciones será similar a la de los elementos de tipo triangulo detallados anteriormente. En los desarrollos de los elementos siguientes podemos resumir principalmente los siguientes pasos de procedimientos como:

1. Exprese los desplazamientos nodales en función de las coordenadas de nodos y constante C_i para obtener la matriz $\boldsymbol{p(x,y)}$
2. Calcule la inversa de matriz **[A]**
3. Calcule a matriz N de a funciones de forma, **[N]=p(x,y)[A]$^{-1}$**

4. Aplique el operador diferencial y obtenga la *Matriz Desplazamiento-Deformación* $[\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{x}})]$.
5. Defina el estado de tensión/deformación y calcule la integral,

$$\{\boldsymbol{k}^{e}\} = \int_{vol} [\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{x}})]^{\boldsymbol{T}} \cdot [\boldsymbol{D}] \cdot [\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{x}})]\, dVol$$

6. Cálculo $\{\boldsymbol{\sigma}^{e}\}$, $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{e}\}$

2. Formulación de la función de forma para un elemento 2D de tipo rectangular.

Para iniciar los pasos e introducir las ecuaciones básicas necesarias para el elemento plano rectangular consideremos la fig 8.1, la cual ha sido discretizada con elementos rectangulares. Los desplazamientos nodales desconocidos son dados como:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{8.2}$$

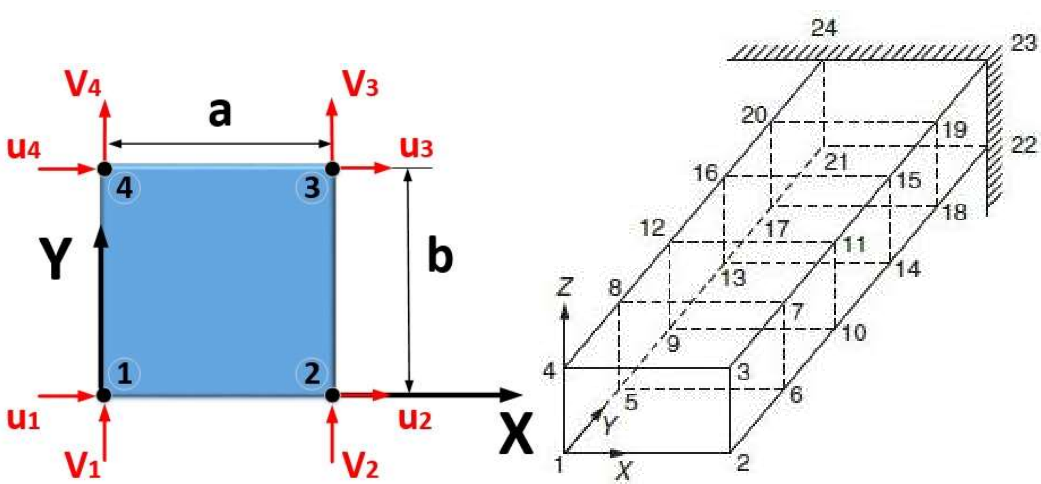

Figura 8.1 Elemento de tipo rectangular linear.

Selección de las funciones de desplazamientos.

Continuando lo que vimos en clases anteriores tenemos que establecer una relación entre los desplazamientos dentro del elemento con los desplazamientos nodales, sabemos que el grado del polinomio de interpolación es definido a partir del conocimiento del número de grados de libertad del elemento (**DOF=8**). Siendo definido por las componentes *u* y *v* en las direcciones *x* y *y* respectivamente. La función de desplazamiento del elemento será una función lineal con 8 coeficientes:

$$\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\} = \begin{cases} u(x,y) = C_0 + C_1x + C_2y + C_3xy \\ v(x,y) = C_4 + C_5x + C_6y + C_7xy \end{cases} \tag{8.3}$$

Debe ser notar que el coeficiente C_3 acompaña el producto de las variables *x* e *y*. La selección de este producto *x·y* se justifica, desde que ninguna preferencia deba ser dada para las direcciones *x e y* de esta forma ambas variables acompañan el coeficiente C_3 y con exponente del mismo grado.

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la Ec (8.3) en forma matricial.

$$\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{C} \tag{8.4}$$

Para determinar los coeficientes C de la Ec. (8.4) vamos a sustituir las coordenadas de los puntos nodales en la Ec. (8.3) como:

$$
\begin{cases}
u(x_1, y_1) \equiv u_1 = C_0 + C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3 x_1 y_1 \\
v(x_1, y_1) \equiv v_1 = C_4 + C_5 x_1 + C_6 y_1 + C_7 x_1 y_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u(x_2, y_2) \equiv u_2 = C_0 + C_1 x_2 + C_2 y_2 + C_3 x_2 y_2 \\
v(x_2, y_2) \equiv v_2 = C_4 + C_5 x_2 + C_6 y_2 + C_7 x_2 y_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u(x_3, y_3) \equiv u_3 = C_0 + C_1 x_3 + C_2 y_3 + C_3 x_3 y_3 \\
v(x_3, y_3) \equiv v_3 = C_4 + C_5 x_3 + C_6 y_3 + C_7 x_3 y_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u(x_4, y_4) \equiv u_4 = C_0 + C_1 x_4 + C_2 y_4 + C_3 x_4 y_4 \\
v(x_4, y_4) \equiv v_4 = C_4 + C_5 x_4 + C_6 y_4 + C_7 x_4 y_4
\end{cases}
\tag{8.5}
$$

En la representación de forma matricial

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\
1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\
1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\
1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix}
\tag{8.6}
$$

Entonces las funciones de forma pueden ser obtenidas como:

$$
N_1(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & x \cdot y \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}}; \quad
N_2(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x & y & x \cdot y \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}};
\tag{8.7}
$$

$$N_3(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x & y & x\cdot y \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{vmatrix}}; \quad N_4(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x & y & x\cdot y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{vmatrix}};$$

Utilizando la Ec. (6.35)

$$\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{u_e}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{8.9}$$

Recordando para N_i tal que $N_1 = 1$ en el *nodo 1* y $N_1 = 0$ para los otros nodos con igual requerimientos para todos los otros nodos, podemos expandir la Ec. (8.9) como:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \vdots N_2 & 0 & \vdots N_3 & 0 & \vdots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & \vdots\, 0 & N_2 & \vdots\, 0 & N_3 & \vdots & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ \cdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{8.10}$$

Particularizando el caso para el elemento rectangular de la fig 8.1, cálculo de las funciones de forma N_i.

$$N_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & xy \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{ab}(ab - bx - ay + xy); \; N_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & y & xy \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{ab}(bx - xy); \tag{8.11}$$

$$N_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & x & y & xy \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{ab}(xy); \quad N_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & x & y & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{ab}(ay - xy);$$

Retomando la breve revisión sobre algunos de los **Conceptos básicos de la teoría de elasticidad**.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\ ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.13}$$

Usando la Ec. (8.3) podemos también expresar la deformación en términos de C_i como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_1 + C_3 y; \\ \varepsilon_y &= C_6 + C_7 x; \\ \gamma_{xy} &= C_2 + C_5 + C_3 x + C_7 y \end{aligned} \tag{8.14}$$

Nota: Podemos tirar una conclusión importante de Ec. (8.14) con respecto al elemento en estudio, las deformaciones calculadas son funciones y se aplican a todos los puntos del elemento variando linealmente. El elemento de estado plano de tensiones rectangular presenta un comportamiento mejor que el elemento triangular.

Propone se realizar una comparación entre el elemento en estado plano de tensiones rectangular vs elemento en estado plano de tensiones triangular para encontrar las limitaciones entre ambos elementos.

Utilizando la ecuación:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(\overline{\boldsymbol{x}})\} = [\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{u}(\overline{\boldsymbol{x}})\} = [\boldsymbol{L}][\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{u_e}\} = [\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{x}})]\{\boldsymbol{u_e}\} \tag{8.15}$$

Sustituyendo en la Ec. (8.15) las funciones $N_i(x, y)$ dadas:

$$
[\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{x}})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \vdots \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \vdots \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \vdots \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \vdots \; 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \vdots \; 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \vdots \; 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \vdots \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \vdots \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} y-b & 0 & \vdots b-y & 0 & \vdots y & 0 & \vdots -y & 0 \\ 0 & x-a & \vdots \; 0 & -x & \vdots 0 & x & \vdots \; 0 & a-x \\ x-a & y-b & \vdots -x & b-y & \vdots x & y & \vdots a-x & -y \end{bmatrix} \tag{8.16}
$$

Sustituyendo la Ec. (8.16) para la matriz de rigidez como:

$$
[\boldsymbol{k}^{e}] = t \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} [\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{x}})]^{\boldsymbol{T}} [\boldsymbol{C}_{(2D)}] [\boldsymbol{B}(\overline{\boldsymbol{x}})] \; dxdy \tag{8.18}
$$

Realizando una sustitución para Ec. (8.17) como:

$$
[B(\bar{x})] = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \vdots g_2 & 0 & \vdots g_3 & 0 & \vdots g_4 & 0 \\ 0 & h_1 & \vdots 0 & h_2 & \vdots 0 & h_3 & \vdots 0 & h_4 \\ h_1 & g_1 & \vdots h_2 & g_2 & \vdots h_3 & g_3 & \vdots h_4 & g_4 \end{bmatrix} \tag{8.19}
$$

Reescribiendo la Ec. (8.19) como:

$$
[\boldsymbol{B}] = \left[[\overline{\boldsymbol{B}}_1] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_2] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_3] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_4] \right] \tag{8.20}
$$

Sustituyendo la Ec. (8.18)

$$
[\boldsymbol{k}^{e}] = \int_V \left(\begin{bmatrix} [\overline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{1}}]^{\boldsymbol{T}} \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{2}}]^{\boldsymbol{T}} \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{3}}]^{\boldsymbol{T}} \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{4}}]^{\boldsymbol{T}} \end{bmatrix} [\boldsymbol{C}_{(2D)}] \left[[\overline{\boldsymbol{B}}_1] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_2] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_3] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_4] \right] \right) dV \tag{8.21}
$$

Resolviendo Ec. (8.21)

$$[\boldsymbol{k}^e] = \int_V \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} [\overline{\boldsymbol{B}}_1]^T[\boldsymbol{C}] \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_2]^T[\boldsymbol{C}] \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_3]^T[\boldsymbol{C}] \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_4]^T[\boldsymbol{C}] \end{bmatrix} \left[[\overline{\boldsymbol{B}}_1] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_2] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_3] \vdots [\overline{\boldsymbol{B}}_4] \right] \end{pmatrix} dV$$

$$[\boldsymbol{k}^e] = \int_V \begin{pmatrix} [\overline{\boldsymbol{B}}_1]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_1] & [\overline{\boldsymbol{B}}_1]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_2] & [\overline{\boldsymbol{B}}_1]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_3] & [\overline{\boldsymbol{B}}_1]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_4] \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_2]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_1] & [\overline{\boldsymbol{B}}_2]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_2] & [\overline{\boldsymbol{B}}_2]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_3] & [\overline{\boldsymbol{B}}_2]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_4] \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_3]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_1] & [\overline{\boldsymbol{B}}_3]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_2] & [\overline{\boldsymbol{B}}_3]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_3] & [\overline{\boldsymbol{B}}_3]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_4] \\ [\overline{\boldsymbol{B}}_4]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_1] & [\overline{\boldsymbol{B}}_4]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_2] & [\overline{\boldsymbol{B}}_4]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_3] & [\overline{\boldsymbol{B}}_4]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_4] \end{pmatrix} dV \tag{8.22}$$

Continuando con Ec. (8.22)

$$[\boldsymbol{k}^e] = \int_V \left[[\overline{\boldsymbol{B}}_i]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_j] \right] dV \;\; con\; (i,j = 1,2,3,4)$$

$$[\boldsymbol{k}^e] = \boldsymbol{t} \int_A \left[[\overline{\boldsymbol{B}}_i]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_j] \right] dA \tag{8.23}$$

Resolviendo la expresión dentro de la integral Ec. (8.23)

$$[\overline{\boldsymbol{B}}_i]^T[\boldsymbol{C}][\overline{\boldsymbol{B}}_j] = \frac{1}{(ab)^2} \begin{bmatrix} g_i & 0 & h_i \\ 0 & h_i & g_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_j & 0 \\ 0 & h_j \\ h_j & g_j \end{bmatrix} = \frac{1}{(ab)^2} [\bar{k}_{ij}]$$

$$[\overline{\boldsymbol{k}}_{ij}] = \begin{bmatrix} g_i C_{11} g_j + h_i C_{33} h_j & g_i C_{12} h_j + h_i C_{33} g_j \\ h_i C_{12} g_j + g_i C_{33} h_j & h_i C_{22} h_j + g_i C_{33} g_j \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

$$[\boldsymbol{k}^e] = \frac{t}{(ab)^2}\int_A [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{ij}}]dA = \frac{t}{(ab)^2}\int_{y=0}^{y=b}\int_{x=0}^{x=a}[\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{ij}}]\,dxdy \;\; con\ (i,j = 1,2,3,4) \qquad (8.21)$$

Finalmente, la matriz $[\boldsymbol{k}^e]$ queda representada como:

$$[\boldsymbol{k}^e] = \frac{t}{(ab)^2}\begin{bmatrix} [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{11}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{12}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{13}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{14}}] \\ [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{21}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{22}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{23}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{24}}] \\ [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{31}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{32}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{33}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{34}}] \\ [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{41}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{42}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{43}}] & [\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{44}}] \end{bmatrix} \qquad (8.24)$$

Finalmente, después de integrar se obtiene como:

$$[\boldsymbol{k}^e] = t\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ & Sim & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} \\ & & & & & & & k_{88} \end{bmatrix} \qquad (8.24)$$

Siendo

$$\begin{aligned} &k_{11} = \frac{bC_{11}}{3a} + \frac{aC_{33}}{3b}; \quad k_{12} = \frac{C_{12+}C_{33}}{4}; \quad k_{13} = \frac{-bC_{11}}{3a} + \frac{aC_{33}}{6b}; \quad k_{14} = \frac{C_{12} - C_{33}}{4}; \\ &k_{15} = \frac{-bC_{11}}{6a} - \frac{aC_{33}}{6b} \quad k_{16} = -k_{12}; \quad k_{17} = \frac{bC_{11}}{6a} - \frac{aC_{33}}{3b}; \quad k_{18} = -k_{14}; \\ &k_{22} = \frac{aC_{11}}{3b} + \frac{bC_{33}}{3a}; \quad k_{23} = -k_{14}; \quad k_{24} = \frac{aC_{11}}{6b} - \frac{bC_{33}}{3a}; \quad k_{25} = -k_{12} \\ &k_{26} = \frac{-aC_{11}}{6b} - \frac{bC_{33}}{6a}; \quad k_{27} = k_{14}; \quad k_{28} = \frac{-aC_{11}}{3b} + \frac{bC_{33}}{6a}; \quad k_{33} = k_{11} \end{aligned} \qquad (8.24)$$

$$k_{34} = -k_{12} \quad k_{35} = k_{17} \quad k_{36} = k_{14} \quad k_{37} = k_{15}$$

$$k_{38} = k_{12} \quad k_{44} = k_{22} \quad k_{45} = -k_{14} \quad k_{46} = k_{28}$$

$$k_{47} = k_{12} \quad k_{48} = k_{26} \quad k_{55} = k_{11} \quad k_{56} = k_{12}$$

$$k_{57} = k_{13} \quad k_{58} = k_{14} \quad k_{66} = k_{22} \quad k_{67} = -k_{14}$$

$$k_{68} = k_{24} \quad k_{77} = k_{11} \quad k_{78} = -k_{12} \quad k_{88} = k_{22}$$