$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx \qquad P_1, P_2 \text{ polinomios}$$

1. Reducirnos al caso $gr(P_1) < gr(P_2)$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P_2(x)} \quad \text{con } gr(R) < gr(P_2)$$

2. Descomposición en fracciones simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con } gr(P) < gr(Q)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} + \cdots + \frac{P_n}{Q_n}$$

estas las sabemos integrar

3. Integrar

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{P_1}{Q_1} + \int \frac{P_2}{Q_2} + \dots + \int \frac{P_n}{Q_n}$$

PASO 1 :

$$\int \frac{x^3+3x}{x^2-2x-3}\,dx$$

observar que el gr (numerador) $\geq$ gr (denominador)

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x & x^2-2x-3 \\ \cline{2-2} \vdots & x+2 \\ 10x+6 & \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ división de polinomios

$$x^3+3x = \underbrace{(x^2-2x-3)}_{gr=2}(x+2) + \overbrace{(10x+6)}^{gr=1}$$

cociente resto

$$\underbrace{gr(\text{resto})}_{\overset{\parallel}{1}} < \underbrace{gr(\text{divisor})}_{\overset{\parallel}{2}}$$

$$\int \frac{x^3+3x}{x^2-2x-3} = \int \frac{\cancel{(x^2-2x-3)}(x+2)}{\cancel{x^2-2x-3}} + \int \frac{(10x+6)}{x^2-2x-3}$$

$$= \int x+2 + \int \frac{10x+6}{x^2-2x-3}$$

le vamos a aplicar el método de fracciones simples

Descomposición en fracciones simples

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx$$

FACTORIZAR EL DENOMINADOR

$$(x^2+2x-3) = (x-1)(x+3)$$

En este caso el teorema de descomposición en fracciones simples (TDFS) nos dice que

$$\exists\ A, B \in \mathbb{R}\ /$$

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$5x+3 = A(x+3)+B(x-1) = (A+B)x + (3A-B)$$

$$\begin{cases} A+B = 5 \\ 3A-B = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} A=2 \\ B=3 \end{array}$$

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{x+3}\,dx =$$

$$= 2\log(|x-1|) + 3\log(|x+3|) + C$$

Cuando $\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\cdots\cdots(x-\alpha_n)}$

n RAÍCES DISTINTAS EN EL DENOMINADOR

$gr(P) < n$

$\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$

El TDFS nos dice que

$\exists\ A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ /

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

Ejemplo

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$$

En este caso el TDFS nos dice que

$\exists\ A, B, C \in \mathbb{R}$ /

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Hallamos A, B, C haciendo denominador común y resolviendo un sistema de ecuaciones lineales $\rightsquigarrow \begin{cases} A = 3/2 \\ B = -1/2 \\ C = -1 \end{cases}$

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{3/2}{x-1}\,dx + \int \frac{(-1/2)}{x+1}\,dx + \int \frac{(-1)}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\log(|x-1|) + \left(-\frac{1}{2}\right)\log(|x+1|) + (-1)\frac{-1}{(x+1)} + C$$

Cuando

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}}$$

$gr(P) < n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ $\leftarrow$ gr(numerador) < gr(denominador)

En este caso cada raíz α_i aporta

n_i sumandos de la forma

$$\frac{A_1}{x-\alpha_i} + \frac{A_2}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{n_i}}{(x-\alpha_i)^{n_i}}$$

(x^2+1) es un polinomio irreducible de grado 2

$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}}$

"no tiene raíces reales"

Ejemplo

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$$

es irreducible

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

x^2+x+1 no tiene raíces reales:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4.1.1}}{2.1}$$

En este caso el TDFS nos dice que

$\exists\ A, B, C \in \mathbb{R}\ /$

$$\frac{3x^2+2x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$A=1;\quad B=2;\quad C=3$

El TDFS nos dice que

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(ax^2+bx+c)\cdots}$$ entonces el factor

irreducible

(ax^2+bx+c) aporta a la descomposición un sumando de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

Nos falta saber integrar

$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$$ con $\boxed{x^2+ax+b \text{ irreducible de grado } 2}$

Paso 1: Hacer cambio de variable

para que el denominador sea (x^2+1)

* lo hacemos "completando cuadrados"

$$x^2 + ax + b = \boxed{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$$

$$\boxed{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)}$$

como $x^2 + ax + b$ es irreducible $(a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b) < 0$

$\Rightarrow 4b - a^2 > 0 \Rightarrow \boxed{b - \frac{a^2}{4} > 0}$

Esto quiere decir que

$$x^2 + ax + b = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$