

ANEXO B: TEORÍA UNIFORME DE LA DIFRACCIÓN

La Teoría Geométrica de la Difracción (GTD o *Geometric Theory of Diffraction*) es una extensión de la Teoría de Óptica Geométrica (GO o *Geometric Optics*) para predecir el campo en una región de sombra causada por una cuña. Sin embargo, la GTD no puede aplicarse en la vecindad de las regiones de transición. La Teoría Uniforme de la Difracción (UTD o *Uniform Theory of Diffraction*) supera estas singularidades para el campo total a lo largo de las llamadas fronteras de transición.

En este anexo se presenta los conceptos de UTD más utilizados en este Proyecto Final de Carrera, como las llamadas regiones de transición, los coeficientes de difracción y las expresiones de los campos difractados para una cuña de paredes perfectamente conductoras, así como el caso particular de una arista o semiplano [39].

B.1 Fronteras de transición

Antes de presentar la expresión del campo difractado por una cuña de paredes conductoras perfectas y ángulo interior $(2 - n)\pi$ radianes, se van a definir las llamadas fronteras de transición que dividen el espacio bidimensional representado en la Figura B.1 en tres regiones cuyas fronteras dependen de la posición de fuente (ρ', φ') , del punto de observación (ρ, φ) y de la posición de la cuña.

A la frontera entre las regiones I y II se conoce como *Reflected Shadow Boundary* (RSB) y a la frontera entre las regiones II y III como *Incident Shadow Boundary* (ISB). Las contribuciones que han de considerarse para calcular el campo total en cada una de las regiones se muestran en la siguiente tabla:

	Región I	Región II	Región III
Espacio angular	$0 < \varphi < \pi - \varphi'$	$\pi - \varphi' < \varphi < \pi + \varphi'$	$\pi + \varphi' < \varphi < n\pi$
Contribuciones	rayo directo rayo reflejado	rayo directo rayo difractado	rayo difractado

Tabla B.1: Contribuciones en cada región del espacio.

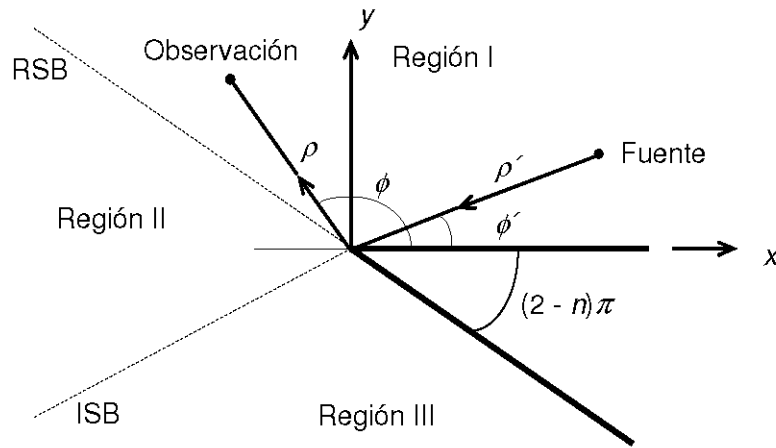


Figura B.1: Regiones de transición y sistema de coordenadas para la cuña

B.2 Campo difractado

En la Figura B.2 se definen dos sistemas de coordenadas: (s', β_0', ϕ') respecto al rayo incidente desde la fuente en el punto de difracción QD y (s, β_0, ϕ) respecto al rayo difractado desde QD hasta el punto de observación. El campo difractado puede expresarse entonces de la siguiente forma:

$$\vec{E}^d = \vec{E}^i(Q_D) \cdot \vec{D}(L; \varphi, \varphi'; \beta'_0) A(s', s) \exp(-jks)$$

Ecuación B.1

$$A(s', s) \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{onda plana} \\ \frac{1}{\sqrt{s \cdot \sin \beta_0}} & \text{onda cilíndrica} \\ \sqrt{\frac{s'}{s(s+s')}} & \text{onda esférica} \end{cases}$$

Ecuación B.2

B.3 El coeficiente diádico de difracción

Antes de presentar el coeficiente diádico de difracción se van a definir los sistemas de coordenadas. Siguiendo la geometría de la Figura B.2, $\hat{\beta}'_0$ y $\hat{\phi}'$ son dos

vectores unitarios paralelo y perpendicular al plano de incidencia (definido por la fuente y la arista de la cuña) y $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\phi}$ son dos vectores unitarios paralelo y perpendicular al plano de difracción (definido por el punto de observación y la arista de la cuña).

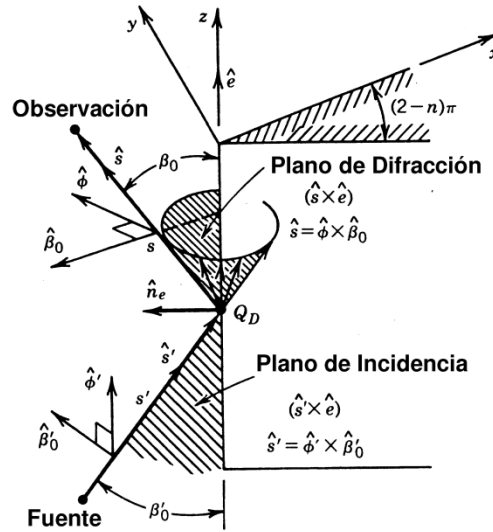


Figura B. 2: Incidencia oblicua sobre una cuña de paredes conductoras

Además, estos vectores junto con los vectores \hat{s}' y \hat{s} cumplen la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\hat{s}' &= \hat{\phi}' \times \hat{\beta}'_0 \\ \hat{s} &= \hat{\phi} \times \hat{\beta}_0\end{aligned}$$

Ecuación B.3

El coeficiente \bar{D} adopta la siguiente expresión:

$$\bar{D} = \hat{\beta}'_0 \hat{\beta}_0 D_s - \hat{\phi}' \hat{\phi} D_h$$

Ecuación B.4

donde D_s y D_h son los coeficientes de difracción para el caso de polarización tipo *soft* o polarización tipo *hard* respectivamente que son definidos más adelante.

Si se descomponen los campos en sus componentes paralela y perpendicular a los planos de difracción e incidencia queda:

$$\begin{aligned}E^i &= E_{\beta'_0}^i \hat{\beta}'_0 + E_{\phi'}^i \hat{\phi}' \\ E^d &= E_{\beta_0}^d \hat{\beta}_0 + E_{\phi}^d \hat{\phi}\end{aligned}$$

Ecuación B.5

que permite escribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} E_{\beta_0}^d(s) \\ E_{\phi}^d(s) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_s & 0 \\ 0 & D_h \end{bmatrix} A(s', s) \exp(-jks)$$

Ecuación B.6

Los coeficientes de difracción se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D_s &= D^i - D^r \\ D_h &= D^i + D^r \end{aligned}$$

Ecuación B.7

donde D^i y D^r se obtienen imponiendo condiciones de continuidad para el campo total en la ISB y la RSB respectivamente. Las expresiones de estos coeficientes son las siguientes:

$$\begin{aligned} D^i &= \frac{-\exp(-\frac{j\pi}{4})}{2n\sqrt{2\pi k} \sin(\beta_0)} \left\{ \cot \left[\frac{\pi + (\phi - \phi')}{2n} \right] F[kLa^+(\phi - \phi')] \right. \\ &\quad \left. + \cot \left[\frac{\pi - (\phi - \phi')}{2n} \right] F[kLa^-(\phi - \phi')] \right\} \\ D^r &= \frac{-\exp(-\frac{j\pi}{4})}{2n\sqrt{2\pi k} \sin(\beta_0)} \left\{ \cot \left[\frac{\pi + (\phi + \phi')}{2n} \right] F[kLa^+(\phi + \phi')] \right. \\ &\quad \left. + \cot \left[\frac{\pi - (\phi + \phi')}{2n} \right] F[kLa^-(\phi + \phi')] \right\} \end{aligned}$$

Ecuación B.8

L es un parámetro de distancia que puede encontrarse satisfaciendo la condición de que el campo total debe ser continuo a lo largo de la ISB y de la RSB. Para el caso de onda plana, cilíndrica o esférica incidente en una cuña de paredes planas y arista recta se tiene:

$$L \begin{cases} s \sin^2(\beta_0) & \text{onda plana} \\ \frac{s' s \sin \beta_0}{s' + s} & \text{onda cilíndrica} \\ \frac{s' s \sin^2(\beta_0)}{s' + s} & \text{onda esférica} \end{cases}$$

Ecuación B.9

La función $F(x)$ recibe el nombre de Función de Transición de *Fresnel* y se define en términos de una integral de *Fresnel*:

$$F(x) = 2j\sqrt{x} \exp(jx) \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \exp(-j\tau^2) d\tau$$

Ecuación B.10

La función $F(x)$ puede calcularse a partir de las integrales del seno y el coseno

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

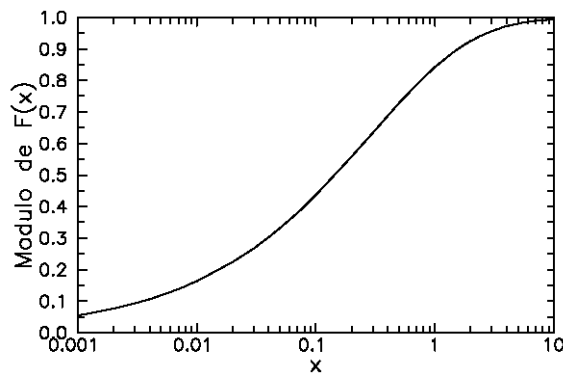
Ecuación B.11

como sigue:

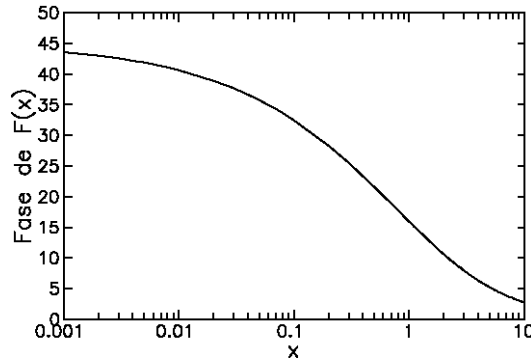
$$F(x) = j\sqrt{2\pi}\sqrt{x} \exp(jx) \left\{ \left[\frac{1}{2} - C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\right) \right] - j \left[\frac{1}{2} - S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{x}\right) \right] \right\}$$

Ecuación B.12

La amplitud y la fase de $F(x)$ se representa en la siguiente figura en la que puede observarse que para $0.001 \leq x \leq 10$, $|F(x)| \leq 1$ y $0 \leq \text{fase}[F(x)] \leq \pi/4$. Además, para $x > 0$, $F(x) \approx 1$.



(a)



(b)

Figura B.3: Función de Transición de *Fresnel*. (a) Módulo y (b) Fase

En las expresiones el argumento de $F(x)$ contiene a la función $g^\pm(\beta)$ que mide la separación angular entre el punto de observación y la ISB o la RSB. Su expresión es:

$$g^\pm(\beta) = 2\cos^2\left(\frac{2n\pi N^\pm - \chi}{2}\right), \quad \chi = \phi \pm \phi'$$

Ecuación B.13

Siendo N^+ y N^- los números enteros que más cerca satisfagan las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} 2n\pi N^+ - \chi &= \pi \\ 2n\pi N^- - \chi &= -\pi \end{aligned}$$

Ecuación B.14

B.4 Coeficientes de difracción GTD

A partir de los coeficientes de difracción definidos por UTD pueden calcularse los coeficientes de difracción definidos por GTD teniendo en cuenta que cuando los campos se evalúan en puntos suficientemente alejados de las fronteras de transición ISB o RSB se cumple

$$kLg^\pm(\phi \pm \phi') > 10$$

Ecuación B.15

que implica como se comentó en el punto anterior $F(x) \approx 1$. Con esta condición y después de unas transformaciones trigonométricas:

$$D^i = \frac{\exp(-\frac{j\pi}{4})}{2n\sqrt{2\pi k} \sin(\beta_0)} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\phi - \phi'}{n}}$$

$$D^r = \frac{\exp\left(-\frac{j\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2\pi k} \sin(\beta_0)} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\phi + \phi'}{n}}$$

Ecuación B.16

Los coeficientes hard o soft se calculan con la ecuación B.7.

B.5 Coeficientes de difracción para una arista

Para el caso $n = 2$ la cuña de paredes perfectamente conductoras se convierte en una arista (semiplano) y los coeficientes UTD se reducen a:

$$D^i = \frac{\exp\left(-\frac{j\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2\pi k} \sin(\beta_0)} \frac{F[kLa(\phi - \phi')]}{\cos \frac{\phi - \phi'}{2}}$$

$$D^r = \frac{\exp\left(-\frac{j\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2\pi k} \sin(\beta_0)} \frac{F[kLa(\phi + \phi')]}{\cos \frac{\phi + \phi'}{2}}$$

Ecuación B.17

siendo

$$a(\beta) = 2\cos^2\left(\frac{\chi}{2}\right), \quad \chi = \phi \pm \phi'$$

Ecuación B.18

obtenida a partir de la ecuación B.16 para el caso $n = 2$.

Los coeficientes *hard* o *soft* se calculan con la ecuación 7.

Los coeficientes GTD pueden calcularse con las expresiones anteriores tomando el valor de 1 para las funciones de transición.

B.6 Difracción UTD en una cuña de paredes de conductividad finita

Cuando las paredes de la cuña en la que se produce el fenómeno de la difracción de una onda incidente no son conductoras perfectas, el coeficiente diádico de difracción adopta una nueva forma. Descomponiendo el coeficiente diádico de difracción en sus componentes *soft* y *hard* por separado a partir de las ecuaciones B.7 y B.8, y añadiendo los términos R_0^\perp y R_n^\perp si la polarización es *soft*, ó R_0^\parallel y R_n^\parallel si la polarización es *hard*, obtenemos el nuevo coeficiente de difracción que ya considera la conductividad finita de las paredes, y que a continuación presentamos sin tener en cuenta la polarización de la onda:

$$D = K \left\{ \cot \left[\frac{\pi + (\phi - \phi')}{2n} \right] F[kLa^+(\phi_1 - \phi'_1)] + \cot \left[\frac{\pi - (\phi - \phi')}{2n} \right] F[kLa^-(\phi - \phi')] \right. \\ \left. + R_0 \cot \left[\frac{\pi - (\phi + \phi')}{2n} \right] F[kLa^+(\phi + \phi')] \right. \\ \left. + R_n \cot \left[\frac{\pi + (\phi + \phi')}{2n} \right] F[kLa^-(\phi + \phi')] \right\}$$

Ecuación B.19

Evidentemente los coeficientes de reflexión de la expresión anterior se calcularán con las ecuaciones A.4 y A.5, según la polarización que presente la onda (paralela y perpendicular) y si la onda incidente presentará una polarización mixta, habría que descomponer el campo incidente en sus componentes *soft* y *hard* por separado, para luego utilizar D_s o D_h según convenga, al igual que ocurría con el coeficiente de reflexión.

Entonces los parámetros $R_0^{\perp, \parallel}$ y $R_n^{\perp, \parallel}$ representarían los coeficientes de reflexión de *Fresnel* para polarización perpendicular o paralela en la cara 0 de la cuña, con ángulo de incidencia ϕ' , y en la cara n de la cuña, con ángulo de reflexión $(n\pi - \phi)$.

La incidencia rasante se produce cuando la onda incidente en una cuña tiene como ángulo de incidencia $\phi' = 0$ o $\phi' = n\pi$. En este caso, tanto para paredes conductoras perfectas como con conductividad finita los coeficientes de difracción UTD generales dados por la ecuación B.19 no son los adecuados. Este campo se corrige por un factor de 0.5.

B.7 Tratamiento de los ángulos en el coeficiente de difracción

Cuando se habla de la teoría de la UTD y de las expresiones de los coeficientes de difracción para el caso de un material de conductividad finita hay que definir unos parámetros R_0 y R_n que son los coeficientes de reflexión de *Fresnel* para polarización perpendicular y paralela en la cara 0 de la cuña, y en la cara n de la cuña, respectivamente. Sus valores se calculan utilizando las siguientes expresiones de las ecuaciones A.4 y A.5, según el tipo de polarización para el coeficiente de reflexión con los valores de los ángulos adecuados.

Se le llama R_0 al coeficiente de reflexión en la cara 0 de la cuña, sea cual sea la polarización y lo mismo con R_n para la cara n .

La cara 0 se define siempre como aquella donde se sitúa el origen del ángulo en *azimut*. Si se tomara el origen de ángulos en la cara más próxima al rayo incidente y con el sentido tal que se vea espacio libre y no material, el ángulo que habrá que utilizar para el cálculo del coeficiente de reflexión en esta cara 0, R_0 , será ϕ' , que coincide con el ángulo que forma el rayo incidente con la cara 0, la más próxima al mismo. Esto se puede expresar como $R_0 = R_0(\phi')$. Por el contrario, la cara n será la otra cara de la cuña, la cual estará más próxima al rayo reflejado. En este caso, sabiendo que el ángulo interior que forma la cuña (en la parte que es material, y no aire) es igual a π radianes, el coeficiente de reflexión en la cara n será igual a $R_n = R_n(n\pi - \phi)$, siendo ϕ el ángulo que forma el rayo reflejado con la cara 0, puesto que se empieza a contar desde el origen del ángulo en *azimut*, que por definición es la cara 0. Es decir, $(n\pi - \phi)$ es el ángulo que forma el rayo reflejado con la cara n .

En resumen y con el criterio de tomar como cara 0 la más próxima al rayo

incidente, para el cálculo de R_0 hay que utilizar el ángulo que forma el rayo incidente con la cara 0, y para el cálculo de R_n se ha de usar el ángulo que forma el rayo reflejado con la cara n (que coincide con la más próxima a éste). Es decir:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_0(\varphi') \\ R_n &= R_n(n\pi - \varphi) \end{aligned}$$

Ecuación B.20

Sin embargo, el criterio que toma el simulador no establece como origen de ángulos la cara más próxima al rayo incidente, sino que el origen se sitúa en aquella cara tal que tomando sentido de ángulos antihorario se recorriese el camino más largo hasta la otra cara. Unas veces será la más próxima al rayo incidente y otras no. Con este criterio cambian los conceptos y las definiciones de R_0 y R_n y hay que deducir las expresiones de estos dos parámetros en el caso de tomar este criterio de ángulos. El objetivo final es hallar qué ángulos hay que considerar para el cálculo R_0 y R_n (puesto que al ser coeficientes de reflexión, requieren la introducción de un ángulo de reflexión para poderse calcular).

Partiendo, para la deducción del caso, de una cuña con ángulo interior igual a 0 radianes ($n=2$), como se observa en la siguiente figura:

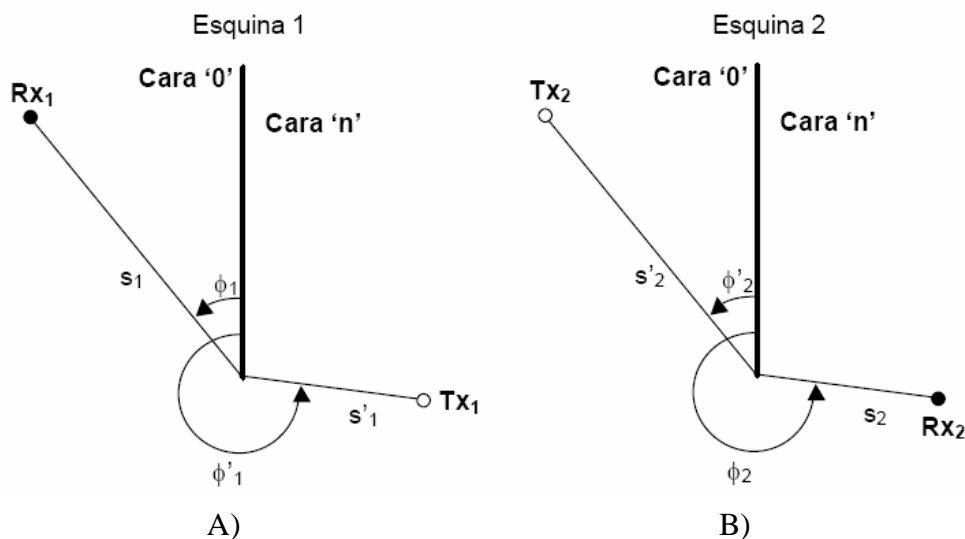


Figura B.4: Caso presentado para la deducción en las expresiones de R_0 y R_n . A) El transmisor más cercano a la cara n B) El transmisor está más cercano a la cara 0

En la figura se observa tanto la situación en la que el rayo reflejado se encuentra más próximo a la cara 0 como en la que lo es el incidente. Recordar que ya se han definido los coeficientes R_0 y R_n cuando era el rayo incidente el más próximo a la cara 0. Sin embargo, la situación presentada en la figura 9.29(A) es precisamente la contraria, como se ha indicado. Para determinar los valores de R_0 y R_n en este caso se aplicara el principio de reciprocidad, válido también para el cálculo del campo difractado. Por otra parte, el campo difractado recibido en el punto de recepción (R_{x1} y R_{x2}) ha de ser el mismo en ambos casos, según el principio de reciprocidad.

Como el término $\frac{1}{s'} \sqrt{\frac{s'}{s(s+s')}} e^{-jk(s+s')}$ en la ecuación $E_D = \frac{E_0}{s'} DA(s, s') e^{-jk(s+s')}$

para el campo difractado tiene el mismo valor en ambos casos, se concluye que el valor del coeficiente de difracción ha de ser el mismo en ambas situaciones (esquinas 1 y 2 de la figura 9.26) para que se cumpla el principio de reciprocidad.

De esta forma, llamando D_a al coeficiente de difracción para la situación de la figura 9.26 (A) y D_b para el de la figura 9.26 (B), se ha de cumplir que $D_a = D_b$. Para un ángulo interior de la cuña de 0 radianes ($n=2$) como el borde un muro o el marco de una puerta, el valor de los parámetros $a+$ y $a-$ que aparecen en la Función de Transición de Fresnel para el cálculo del coeficiente de difracción es el siguiente:

$$a^\pm(\chi) = 2\cos^2(\chi), \quad \chi = \phi \pm \phi'$$

Ecuación B.21

Por tanto $a^\pm(\chi) = a(\chi)$. Llegado a este punto, se denotará R_{01} y R_{n1} a los coeficientes de reflexión, sea cual sea la polarización, en la cara 0 y la cara n respectivamente, para la situación de la figura 9.26(A). R_{02} y R_{n2} son estos mismos coeficientes para la situación de la figura 9.26 (B). En este caso, el coeficiente de difracción D_a tiene la forma:

$$D_a = K \left\{ \cot \left[\frac{\pi + (\phi_1 - \phi'_1)}{4} \right] F[kLa(\phi_1 - \phi'_1)] \right. \\ + \cot \left[\frac{\pi - (\phi_1 - \phi'_1)}{4} \right] F[kLa(\phi_1 - \phi'_1)] \\ + R_{01} \cot \left[\frac{\pi - (\phi_1 + \phi'_1)}{4} \right] F[kLa(\phi_1 + \phi'_1)] \\ \left. + R_{n1} \cot \left[\frac{\pi + (\phi_1 + \phi'_1)}{4} \right] F[kLa(\phi_1 + \phi'_1)] \right\}$$

Ecuación B.22

Donde 'K' no depende de los ángulos ni de las distancias consideradas. Teniendo en cuenta que $\phi'_2 = \phi_1$ y que $\phi_2 = \phi'_1$ se obtiene para el caso de D_b lo siguiente:

$$D_b = K \left\{ \cot \left[\frac{\pi + (\phi'_1 - \phi_1)}{4} \right] F[kLa(\phi'_1 - \phi_1)] \right. \\ + \cot \left[\frac{\pi - (\phi'_1 - \phi_1)}{4} \right] F[kLa(\phi'_1 - \phi_1)] \\ + R_{01} \cot \left[\frac{\pi - (\phi'_1 + \phi_1)}{4} \right] F[kLa(\phi'_1 + \phi_1)] \\ \left. + R_{n1} \cot \left[\frac{\pi + (\phi'_1 + \phi_1)}{4} \right] F[kLa(\phi'_1 + \phi_1)] \right\}$$

Ecuación B.23

Debido a que $D_a=D_b$, los dos primeros sumando de las dos ecuaciones anteriores es evidente que coinciden. Para que lo hagan los otros dos se tienen que cumplir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} R_{01} &= R_{02} \\ R_{n1} &= R_{n2} \end{aligned}$$

Ecuación B.24

Si se quiere que coincidan los valores del coeficiente de reflexión en las dos situaciones que se están tratando, ha de ocurrir que el ángulo de reflexión considerado en su cálculo sea el mismo, pues el resto de variables (polarización, características eléctricas, etc) permanecen constantes. Así pues, como $R_{02}=R_{02}(\varphi'_2)$, para que se cumpla que $R_{01}=R_{02}$ como indica la Ecuación B.24, el ángulo para el cálculo de R_{01} ha de tener el valor de φ'_2 , es decir, $R_{01}=R_{01}(\varphi'_2)$. Como resulta que $\varphi'_2=\varphi_1$, se tiene que:

$$R_{01}=R_{01}(\varphi_1)$$

Ecuación B.25

De igual forma, se tiene que $R_{n2} = R_{n2}(n\pi - \varphi_2)$ como puede deducirse de la Ecuación B.20, con lo que si se ha de cumplir la condición de la Ecuación B.24 ($R_{n1}=R_{n2}$), el ángulo para el cálculo de R_{n1} ha de tener el valor de $(n\pi - \varphi_2)$, es decir, $R_{n1} = R_{n1}(n\pi - \varphi_2)$. Como resulta que $\varphi_2=\varphi'_1$, se tiene que:

$$R_{n1}=R_{n1}(n\pi - \varphi_2)$$

Ecuación B.26

Con este procedimiento ya se han obtenido los valores R_0 y R_n para el caso en el que es el rayo reflejado el que está más próximo a la cara 0 de la cuña, que es el objetivo al que se pretendía llegar.

B.8 Campo eléctrico definido por un rayo difractado

El campo definido por un rayo difractado que alcanza el receptor y que no ha sido afectado por otro mecanismo de propagación se puede expresar como:

$$E_D = \frac{E_0}{s'} DA(s, s') e^{-jk(s+s')}$$

Ecuación B.27

Esta expresión es la misma dada por la ecuación 1. En la figura se ha definido s' , es la distancia que recorre el rayo antes de alcanzar el punto de difracción. De igual forma, s es la distancia que recorre el rayo después del punto de difracción.

$D=D(n,\beta_0',\varphi',\varphi,L)$ es el parámetros que aparece en estas expresiones ya se han tratado. Cuando el rayo incidente representa una onda esférica el valor del parámetro de distancia L , necesario para el cálculo de D , viene dado coeficiente de difracción el cual vendrá determinado por la polarización. El resto de los por:

$$A(s, s') = \sqrt{\frac{s'}{s(s + s')}}$$

Ecuación B.28

Este factor representa la atenuación del campo difractado con la distancia. Habitualmente se le denomina *Spreading Factor*.