FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLE (O SUSTITUCIÓN)

$$\boxed{\int f(g(x)).g'(x)\,dx = F(g(x))}$$ donde $F' = f$

Para ver que la fórmula es cierta

Calculemos

$$\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x)).g'(x) = \boxed{f(g(x))g'(x)}$$

Regla de la cadena

Esto muestra que $F(g(x))$ es una primitiva de $f(g(x)).g'(x)$ como queríamos ver

VERSIÓN DEFINIDA DE LA F.C.V

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Deduzcamos la fórmula:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) \overset{*}{=}$$

Por Barrow + Fórmula de cambio de variable

$$\overset{*}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

Por Barrow

Ejemplo:

$$\int_4^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_{g(4)}^{g(9)} e^x\,dx = \int_2^3 e^x\,dx \overset{*}{=}$$

$$e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = f(g(x))\cdot g'(x)$$ donde

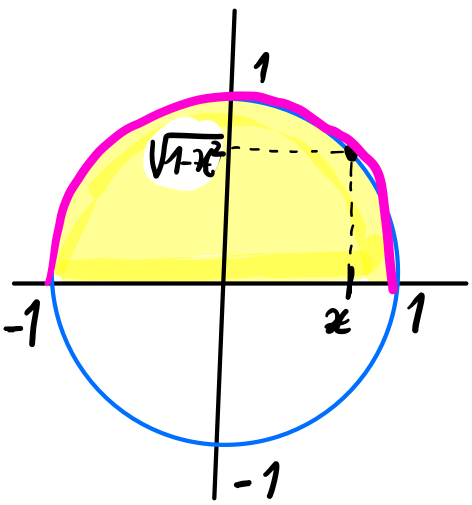
$$f = e^x$$
$$g = \sqrt{x} \Rightarrow g' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\overset{(*)}{=} e^{x}\Big|_{2}^{3} = \boxed{e^{3} - e^{2}}$$

Barrow
+
$(e^{x})' = e^{x}$

CÁLCULO DEL AREA DEL CÍRCULO

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$



El semi-círculo superior es el gráfico de la función $f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

El area del semicírculo es

$$\int_{-1 = g(-\pi/2)}^{1 = g(\pi/2)} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{f}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-(\text{sen}(x))^2}}_{f(g(x))}\cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx \overset{(*)}{=}$$

$f = \sqrt{1-x^2}$

$g = \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow g'(x) = \cos(x)$

$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\overset{*}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(x)} \cdot \cos(x)\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(x))^2\, dx \overset{*}{=}$$

Ejercicio

(clase pasada)

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + x}{2}$$

$$\overset{*}{=} \left.\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x}{2}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

Barrow

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi/2)\overbrace{\cos(\pi/2)}^{0} + \pi/2}{2}\right) - \left(\frac{\operatorname{sen}(-\pi/2)\overbrace{\cos(-\pi/2)}^{0} + (-\pi/2)}{2}\right) =$$

$$= \frac{(\pi/2)}{2} - \left(\frac{(-\pi/2)}{2}\right) = \frac{\pi/2}{2} + \frac{\pi/2}{2} = \pi/2$$

ENTONCES EL AREA DEL CÍRCULO ES

π (pi)

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR FRACCIONES SIMPLES

$$\frac{x+1}{7x^3-2x+2}$$

Función Racional o cociente de polinomios

"LAS FRACCIONES SIMPLES"

$$\boxed{\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx} \underset{CV}{=} \int \frac{1}{u}\,du = \log(|u|)$$

$u = x-\alpha$

$du = dx$

$$= \log(|x-\alpha|)$$

D.C.V

Paréntesis: $\left(\log(x)\right)' = \frac{1}{x}$

entonces $\log(x)$ es primitiva de $1/x$ en $\mathbb{R}^+$

Observar que tiene sentido definir $\log(-x)$ en $\mathbb{R}^-$

y que $\left(\log(-x)\right)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

Regla de la cadena

Es decir: $\log(-x)$ es primitiva de $\frac{1}{x}$ en $\mathbb{R}^-$

En resumen $\log(|x|) : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

es primitiva de $1/x$

Notación:

En general cuando calculamos primitivas, si $F' = f$

escribimos

$\int$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde C representa una constante.

esto se lée: "las primitivas de f son las funciones de la forma $F(x)+C$ donde C es una constante cualquiera."

Volvemos a las fracciones simples

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx \qquad \text{donde } n\in\mathbb{N},\ n>1$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx \underset{\substack{CV\\ u=x-\alpha\\ du=dx}}{=} \int \frac{1}{u^n}\,du =$$

$$\int u^{-n}\,du \qquad \frac{u^{-n+1}}{} \qquad C \qquad \#$$

$$= \int u^{-n}\,du \underset{(*)}{=} \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C -$$

$$\boxed{\int u^{\alpha} = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)} \;(*)$$

$$\underset{\text{D.C.V}}{\overset{\#}{=}} \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

Por ejemplo, si $n=2$:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2}\,dx = \frac{-1}{x-\alpha}$$

OTRA FRACCIÓN SIMPLE

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C$$

ÚLTIMA FRACCIÓN SIMPLE (que vamos a ver)

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\log(|u|) + C$$

$u = x^2+1$
$du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2} \log(|x^2+1|) + C$$

DCV