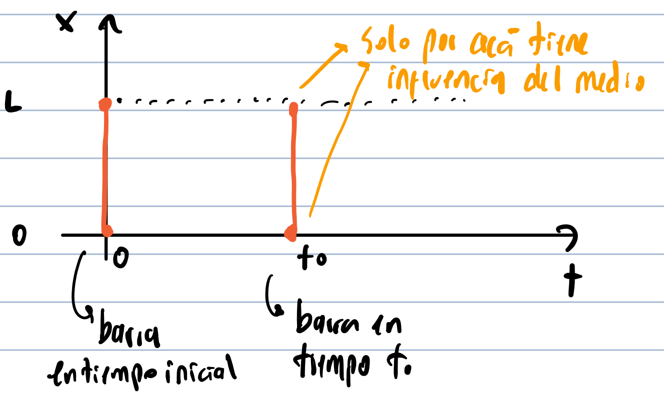
Ecuaciones en deriv parciales:

>> De orden 2 estudiamos soluciones de $f(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$.
Siendo $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

En particular nos centramos en tres:

- Ecuación de calor $u_t = u_{xx}$ (u(t,x) es la temperatura en tiempo t, posición x)
- Ecuación de onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (u(t,x) es la posición vertical del pto x de la cuerda en tiempo t)
- Ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$

• Ecuación de calor:



Hay que poner condiciones de borde, así como antes buscábamos soluc en función de cond. iniciales.

El dominio de soluciones será

$$\Omega = [0, +\infty) \times (0, L)$$

▷ Cond. de borde de barra nulos. (bordes de la barra a 0 grados)

- Consideramos el problema
  - $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, $u \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$
  - $u_t = u_{xx}$
  - $u(0,t) = u(L,t) = 0$
  - $u(x,0) = u_0(x)$ con $u_0(0) = u_0(L) = 0$

- buscamos u de la forma $u(t,x) = T(t)X(t)$

Si u solución $u_t - u_{xx} = 0 \iff T'(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0$

$$\iff \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

$$\iff \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu = \frac{X''(x)}{X} \quad \text{con } \mu \text{ cte}$$

- De las cond de borde se tiene $X(0) = 0$, $X(L) = 0$

- Resumiendo: $T(t)X(x)$ es soluc si verifica $\begin{cases} T'(t) = \mu T(t) \\ X''(x) = \mu X(x) \end{cases}$ con $\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$

De aquí obtenemos
- $T(t) = T_0 e^{\mu t}$
- $\mu < 0$ necesariamente y $X(x) = B.\text{Sen}(\frac{n\pi}{L}.x)$
  De hecho $\mu = -(\frac{n\pi}{L})^2$

Por lo tanto conseguimos soluc de la forma $\boxed{u(t,x) = b.\text{Sen}(\frac{n\pi}{L}.x)\, e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t}}$

Pero ojo, la condición no deberá cumplir la sig igualdad restrictiva: $u_0(x) = b\,\text{Sen}(\frac{n\pi}{L}.x)$

→ Usando que las sumas de soluciones también lo son

$\boxed{u(t,x) = \sum_1^n b_k \text{Sen}(k\frac{\pi}{L}.x)\, e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t}}$ es soluc con c. borde $\begin{cases} u_0(x) = \sum_1^n b_k \text{Sen}(\frac{k\pi}{L}x) \\ u(t,0) = u(0,L) = 0 \end{cases}$

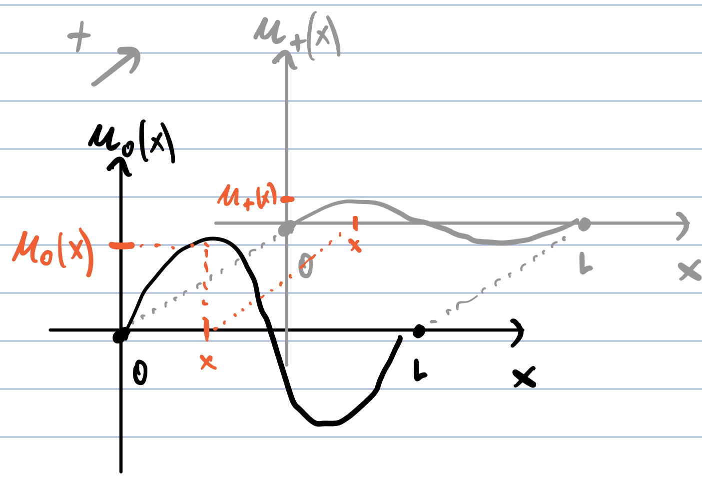
▷ Condiciones de borde ctes: ¿Cómo hacemos si $u(t,0) = A$, $u(t,L) = B$ ctes?

- Primero buscamos soluc estacionaria $u(x,t) = u_e(x)$
  Corroboramos que esta es $\boxed{u_e(x) = \left(\frac{B-A}{L}\right).x + A}$

- Luego, basta con ver que si $\tilde{u}$ soluc con cond nulas y $\tilde{u}_0$ temp. inicial y u_e soluc estacionaria

  Entonces $u = \tilde{u} + u_e$ es soluc con temp. inicial $u_0 = \tilde{u}_0 + u_e$ y condiciones de borde A y B ctes.

- Ecuación de onda:



Estudiamos la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Si $\Omega = (0,+\infty) \times (0,L)$ pedimos nuevamente
- $u \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$
- $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$

y las condiciones de borde serán
- $u(0,x) = u_0(x)$ (pos. inicial)
- $u(t,0)$, $u(t,L)$ posiciones extremos
- $u_t(0,x) = v_0(x)$ (vel inicial)

▷ Extremos fijos : $u(t,0) = 0 = u(t,L)$

De forma análoga, buscando $u(t,x) = T(t)X(t)$

obtenemos $\boxed{u(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\cdot\left(A\cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)}$

Que fuerza a tener cond. de borde $\begin{cases} u_0(x) = A\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}\right)x \\ v_0(x) = B\cdot\frac{k\pi c}{L}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}\cdot t\right) \end{cases}$

En gral si las cond de borde son $\begin{cases} u_0(x) = \sum_1^n b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ v_0(x) = \sum_1^n b_k' \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \end{cases}$

entonces $\boxed{u(t,x) = \sum_1^n \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\cdot\left(A_k\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + B_k\cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)}$

con $A_k = b_k$, $B_k = b_k'$ es solución